

ME4293-Phần mềm phân tích và mô phỏng hệ động lực

1. Matlab: véc tơ – ma trận – vẽ đồ thị - ode - simulink

Bài 1.

Cho ma trận A và véc tơ b, c

$$A = \begin{bmatrix} 18 & 3 & -2 \\ 3 & 20 & -3 \\ -2 & -3 & 30 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Hãy viết các dòng lệnh Matlab để thực hiện các việc sau:

Nhập ma trận A , vector b và c vào.

Nhân ma trận A với vector b , $[Ab]$

Tính và đưa ra ma trận A_i là ma trận nghịch đảo của A

Giải phương trình $Ax = c$

Tính các trị riêng và các véc tơ riêng tương ứng của ma trận A .

Bài 2.

a) Hãy tìm véc tơ x có chuẩn (độ lớn) nhỏ nhất thỏa mãn phương trình

$$Ax = b, A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

b) Hãy tìm véc tơ x để sai lệch giữa hai vế của phương trình sau có độ lớn nhỏ nhất

$$Ax = b, A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 9 \\ 7 & 11 & 18 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Bài 3.

Cho các ma trận

$$M = \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 15 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 140 & 30 \\ 30 & 170 \end{bmatrix},$$

và $0_{2 \times 2}$ là ma trận 0 cỡ 2×2 , $E_{2 \times 2}$ là ma trận đơn vị cỡ 2×2 . Hãy đưa ra ma trận A như dưới đây, sau đó tính trị riêng của nó,

$$A = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} & E_{2 \times 2} \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}.$$

Bài 4.

Sử dụng Matlab vẽ đồ thị các hàm số sau:

$$y(x) = e^{-x} - x, \text{ trong khoảng } [-1 \dots 1], \text{ với } \Delta x = 0.1;$$

$$y(x) = x \sin(x) - 1, \text{ trong khoảng } [1 \dots 3], \text{ với } \Delta x = 0.1;$$

$$y(x) = x^2 - 2x - 5, \text{ trong khoảng } [-4 \dots 4], \text{ với } \Delta x = 0.1;$$

$$y(x) = x^3 - 6x^2 + 3x - 1, \text{ trong khoảng } [1 \dots 6], \text{ với } \Delta x = 0.1;$$

$$y(x) = x^2 \cos x + e^{-0.1x} \sin x, \text{ trong khoảng } [0 \dots 10], \text{ với } \Delta x = 0.1.$$

Từ đồ thị hãy xác định nghiệm của các phương trình $y(x) = 0$ trong các khoảng tương ứng.

Bài 5.

Vẽ đồ thị hàm phân thức sau trong khoảng $[0 \dots 3.5]$, biết các nghiệm của mẫu số:

$$f(x) = \frac{4(1-x^2)}{(10-7x^2)(1-x^2)-2}, \quad x_1 = 0.7990, \quad x_2 = 1.3380$$

Bài 6.

Cho phương trình vi phân cấp 2 sau đây

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + c \sin(x) = f(t); \quad x(0) = x_0 = 0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 = 0.3$$

$$m = 1, b = 2, c = 100, f(t) = 2 \sin(8t)$$

- Sử dụng Simulink để giải phương trình vi phân trên trong khoảng thời gian $[0, 10]$.
- Hạ bậc đưa về hệ phương trình vi phân cấp 1, sau đó sử dụng ode45 để giải.
- So sánh hai kết quả nhận được

Bài 7.

Sử dụng lệnh ode45 giải phương trình vi phân sau

$$\dot{y} = 2t + e^{-0.2t} \sin(2t), \quad y(0) = 0$$

Bài 8.

Nêu phương án kết hợp Simulink và m-file để mô phỏng hệ động lực mô tả bởi phương trình vi phân ở dạng ma trận như sau (chẳng hạn như đối với robot n bậc tự do):

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$$

2. Lập trình với Matlab

Bài 9.

1. Viết một chương trình con để tính tổng $S(x, n)$

$$S(x, n) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n, \quad \text{với } n \text{ là số nguyên dương và } x \text{ là số thực cho trước.}$$

Đưa ra kết quả với $x = 0.5$ và $n = 10$. $S(0.5, 10) = ?$.

2. Sử dụng lệnh while giải bài toán tìm số tự nhiên n lớn nhất thỏa mãn bất đẳng thức sau

$$S(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} < 27.$$

Thuật giải Newton-Raphson

Cho biết thuật giải của phương pháp lặp Newton-Raphson giải hệ phương trình đại số phi tuyến

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{f} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ như sau}$$

Bước 1. Khởi gán $k = 0$, chọn xấp xỉ ban đầu $\mathbf{x}^{(0)}$.

Bước 2. Tính $\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})$. Nếu $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})\| < \varepsilon$ thì dừng, nếu không thì tiếp tục từ 3.

Bước 3. Tính ma trận Jacobi tại $\mathbf{x}^{(k)}$, tức là $\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})$.

Bước 4. Giải $\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})\delta\mathbf{x} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})$ để tìm $\delta\mathbf{x}^{(k)}$.

Bước 5. Lấy $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \delta\mathbf{x}$.

Bước 6. Tăng k , $k = k + 1$. Nếu $k > M$ với M là số bước lặp đã chọn trước, thì dừng. Nếu không, tiếp tục từ Bước 2.

với $\mathbf{J}(\mathbf{x}_k)$ là ma trận Jacobi được xác định tại điểm $\mathbf{x}_k$

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^{(k)}) = \begin{bmatrix} \partial f_1 / \partial x_1 & \partial f_1 / \partial x_2 & \dots & \partial f_1 / \partial x_n \\ \partial f_2 / \partial x_1 & \partial f_2 / \partial x_2 & \dots & \partial f_2 / \partial x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \partial f_n / \partial x_1 & \partial f_n / \partial x_2 & \dots & \partial f_n / \partial x_n \end{bmatrix} (\mathbf{x}^{(k)})$$

Bài 10.

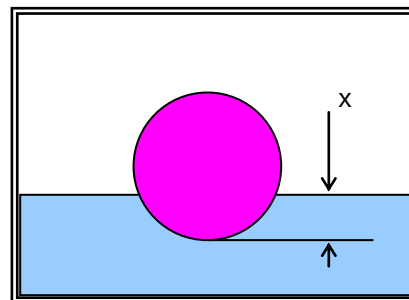
Một cái phao hình cầu, bán kính R , nổi trên mặt nước. Tìm phần chìm x của phao trong nước. Cho biết x cần thỏa mãn phương trình sau đây, $0 < x < 2R$

$$\rho\pi(Rx^2 - \frac{1}{3}x^3) - \xi\rho\frac{4}{3}\pi R^3 = 0, \quad 0 < \xi < 1$$

Với $\xi = 0.25$ ta có

$$(Rx^2 - \frac{1}{3}x^3) - \frac{1}{3}R^3 = 0.$$

Cho $R = 1$, tìm x trong khoảng $[0, 2R]$.



Bài 11.

Phương trình tần số khi xét dao động dọc của thanh thẳng với các điều kiện biên:

a) một đầu ngàm đầu kia có lò xo

$$f(x) = \tan x + \frac{1}{2}x$$

Tìm nghiệm của phương trình $f(x) = 0$, trong các khoảng $[k\pi \dots (k+1)\pi]$, với $k = 0, 1, 2, 3 \dots$

b) một đầu ngàm đầu kia có khối lượng tập trung

$$f(x) = \cot x - \varepsilon x$$

Với $\varepsilon = 1$, tìm nghiệm của phương trình $f(x) = 0$, trong các khoảng $[k\pi \dots (k+1)\pi]$, $k = 0, 1, 2, 3 \dots$

Bài 12.

Phương trình tần số khi xét dao động uốn của thanh thẳng với các điều kiện biên:

a) một đầu ngàm đầu kia tự do:

$$f(x) = \cos(x)\cosh(x) + 1$$

Tìm 4 nghiệm đầu tiên của phương trình $f(x) = 0$.

b) hai đầu ngàm chặt (hoặc hai đầu tự do): $f(x) = \cos(x)\cosh(x) - 1$

Tìm 4 nghiệm đầu tiên của phương trình $f(x) = 0$.

Bài 13.

Xác định giao điểm của đường tròn $x^2 + y^2 = 3$ và hyperbol $xy = 1$. (Hoặc tìm nghiệm của hệ phương trình sau

$$f_1(x, y) = x^2 + y^2 - 3 = 0, \quad f_2(x, y) = xy - 1 = 0)$$

Bài 14.

Viết một chương trình con có sử dụng lệnh while để tính căn bậc hai của $a > 0$ theo phương pháp lặp Newton-Raphson, [theo công thức Heron]

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + a}{2x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{a}{2x_n}$$

Với $x(1) = 1$, độ chính xác yêu cầu là 10^{-7} .

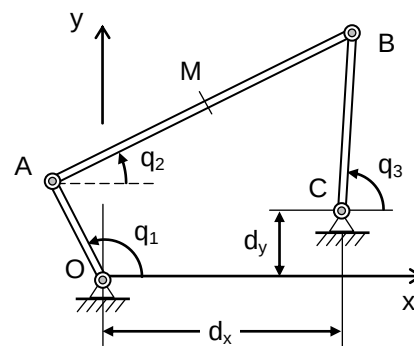
Bài 15. Phân tích động học cơ cấu bốn khâu bản lề.

Cho cơ cấu 4 khâu bản lề OABC như hình bên. Các kích thước của cơ cấu $OA = l_1$, $AB = l_2$, $BC = l_3$, d_x và d_y , $l_4 = \sqrt{d_x^2 + d_y^2}$. Cho

biết $q_1 = q_{10} + \Omega t$. Hãy viết các phương trình liên kết cho cơ cấu,

từ đó xác định các góc $q_2(t)$ và $q_3(t)$ tại các thời điểm t_k , $k = 1, 2, 3, \dots$ ứng với các góc quay của thanh OA,

$q_1(t_k) = q_{10} + \Omega t_k$.



Triển khai trong Matlab để giải các bài toán sau:

- Sử dụng phương pháp Newton-Raphson giải các phương trình liên kết để xác định các góc $q_2(t)$, $q_3(t)$;
- Từ các phương trình liên kết tính các vận tốc góc và gia tốc góc các thanh AB và BC tại từng thời điểm $t = t_k$.

- Vẽ quỹ đạo trung điểm M của AB; tính vận tốc và gia tốc của nó [vẽ đồ thị $v_{Mx}(t)$, $v_{My}(t)$ và $a_{Mx}(t)$, $a_{My}(t)$].

Sử dụng các bộ thông số sau

Stt	q_{10} [rad]	Ω [rad/s]	L_1 [m]	$L_2^{(*)}$ [m]	L_3 [m]	d_x [m]	d_y [m]
1	0	10	0.20	0.60	0.40	0.45	0.12
2	0	20	0.15	0.55	0.45	0.40	0.15
3	0	30	0.12	0.65	0.40	0.45	0.12
4	0	10	0.20	0.60	0.45	0.40	0.15

(*) Lưu ý: cần kiểm tra điều kiện quay toàn vòng của khâu dẫn, $(l_1 + l_4 < l_2 + l_3)$ & $(l_4 - l_1 > l_2 - l_3)$, nếu không thỏa mãn thì điều chỉnh chiều dài L_2 .

HD

Từ hình vẽ ta viết được các phương trình liên kết

$$f_1(q_1, q_2, q_3) = l_1 \cos q_1 + l_2 \cos q_2 - d_x - l_3 \cos q_3 = 0$$

$$f_2(q_1, q_2, q_3) = l_1 \sin q_1 + l_2 \sin q_2 - d_y - l_3 \sin q_3 = 0$$

Tính được các ma trận jacobii

$$\mathbf{J}_{q_{23}} = \begin{bmatrix} -l_2 \sin q_2 & l_3 \sin q_3 \\ l_2 \cos q_2 & -l_3 \cos q_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_{q_1} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin q_1 \\ l_1 \cos q_1 \end{bmatrix}$$

Đạo hàm các phương trình liên kết theo thời gian cho ta phương trình để giải bài toán vận tốc và gia tốc:

$$\mathbf{J}_{q_{23}} \dot{\mathbf{q}}_{23} + \mathbf{J}_{q_1} \dot{q}_1 = 0 \Rightarrow \dot{\mathbf{q}}_{23} = -\mathbf{J}_{q_{23}}^{-1} \mathbf{J}_{q_1} \dot{q}_1$$

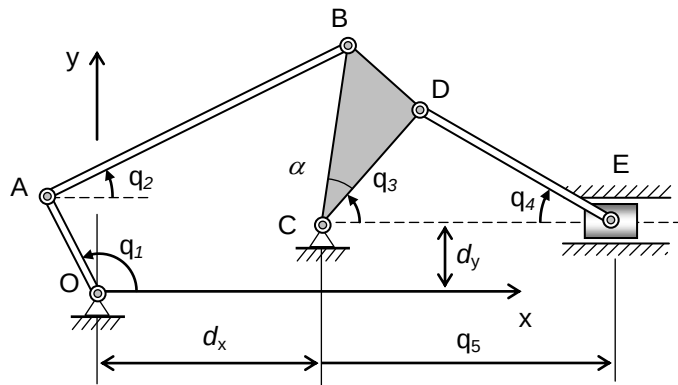
$$\mathbf{J}_{q_{23}} \ddot{\mathbf{q}}_{23} + \dot{\mathbf{J}}_{q_{23}} \dot{\mathbf{q}}_{23} + \mathbf{J}_{q_1} \ddot{q}_1 + \dot{\mathbf{J}}_{q_1} \dot{q}_1 = 0 \Rightarrow \ddot{\mathbf{q}}_{23} = -\mathbf{J}_{q_{23}}^{-1} (\dot{\mathbf{J}}_{q_{23}} \dot{\mathbf{q}}_{23} + \mathbf{J}_{q_1} \ddot{q}_1 + \dot{\mathbf{J}}_{q_1} \dot{q}_1)$$

với

$$\dot{\mathbf{J}}_{q_{23}} = \begin{bmatrix} -\dot{q}_2 l_2 \cos q_2 & \dot{q}_3 l_3 \cos q_3 \\ -\dot{q}_2 l_2 \sin q_2 & \dot{q}_3 l_3 \sin q_3 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{J}}_{q_1} = \begin{bmatrix} -l_1 \cos q_1 \\ -l_1 \sin q_1 \end{bmatrix} \dot{q}_1$$

Bài 16. Phân tích động học cơ cấu sáu khâu.

Cho cơ cấu sáu khâu như hình vẽ. Các thông số của cơ cấu gồm các kích thước $OA = L_1$, $AB = L_2$, $BC = L_3$, $CD = L_5$, $DE = L_6$, d_x và d_y và góc α . Viết các phương trình liên kết cho cơ cấu. Sử dụng phương pháp lặp Newton-Raphson tìm các tọa độ suy rộng $q_2(t), q_3(t), q_4(t), q_5(t)$, khi biết giá trị góc quay của khâu OA, $q_1(t_k) = q_{10} + \Omega t_k$.



Cho biết các thông số của hệ:

stt	q_{10} [rad]	Ω [rad/s]	L_1 [m]	L_2 [m]	L_3 [m]	d_x [m]	d_y [m]		α (rad)	L_5 [m]	L_6 [m]
1	0	1	0.20	0.60	0.36	0.45	0.15		$\pi/6$	0.46	0.66
2											
3											

Bài 17. Bài toán động học ngược robot

Trong bài toán động học ngược robot, ta cần xác định các góc khớp – hay tọa độ khớp – khi muốn bàn kẹp của robot ở một vị trí mong muốn. Trong phần này ta xét một tay máy hai bậc tự do phẳng có sơ đồ như trên hình bên. Sử dụng phương pháp lặp Newton-Raphson tìm các tọa độ suy rộng q_1, q_2 để bàn

kep E ở một vị trí mong muốn cho trước x_E, y_E . Biết chiều dài các khâu là $OA = L_1 = 0.50 \text{ m}$, $AE = L_2 = 0.70 \text{ m}$.

HD: Mối liên hệ giữa tọa độ điểm E với các tọa độ suy rộng được xác định bởi

$$x_E = l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 - q_2)$$

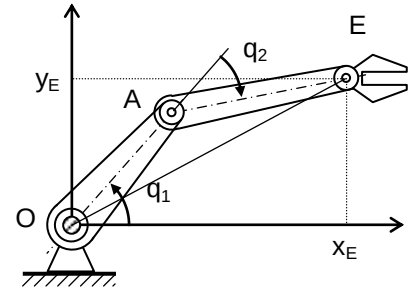
$$y_E = l_1 \sin q_1 + l_2 \sin(q_1 - q_2)$$

Đây là một hệ hai phương trình phi tuyến đối với hai ẩn q_1, q_2 . Phương pháp Newton-Raphson được sử dụng để giải hệ này, với ma trận Jacobi như sau

$$\mathbf{J}_q = \begin{bmatrix} -l_1 \sin q_1 - l_2 \sin(q_1 - q_2) & l_2 \sin(q_1 - q_2) \\ l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 - q_2) & -l_2 \cos(q_1 - q_2) \end{bmatrix}$$

Triển khai trong Matlab với số điểm chia n và tọa độ điểm E được cho bởi:

```
n = 20; % so diem chia
xE = linspace(1.1, 0.1, n);
yE = linspace(0.1, 1.1, n);
```



Tay máy 2 dof

3. Mô phỏng hệ động lực

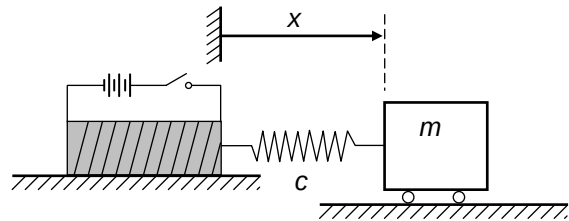
Bài 18.

Khối sắt nhiễm từ có khối lượng m được nối với một lò xo độ cứng c , chiều dài L . Khối này ở trạng thái nghỉ tại $x = L$, khi đóng mạch nam châm điện xuất hiện một lực đẩy $F = k / x^2$ tác dụng lên khối sắt.

Phương trình vi phân mô tả chuyển động của khối này là

$$m\ddot{x} = k / x^2 - c(x - L)$$

Sử dụng phương pháp Runge-Kutta (ode45) giải phương trình vi phân trên với các thông số của hệ $m = 1\text{kg}$, $k = 5\text{N} \cdot \text{m}^2$, $c = 120\text{N/m}$, $L = 0.20\text{m}$, và điều kiện đầu $x(0) = 1.2L$, $\dot{x}(0) = 0$, $t = [0, 10]$.



Bài 19.

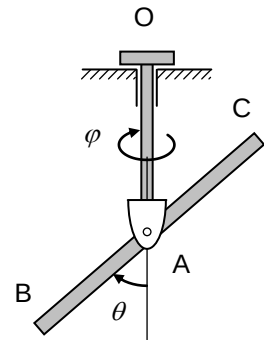
Thanh đồng chất BC được nối bằng bản lề trơn B với thanh OA, thanh này quay được quanh trục đứng. Bỏ qua ma sát. Sử dụng phương trình Lagrange 2 ta nhận được phương trình vi phân chuyển động của hệ:

$$\ddot{\theta} = \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta, \quad \ddot{\varphi} = -2\dot{\theta}\dot{\varphi} \cot \theta$$

Giải hệ phương trình vi phân trên bằng phương pháp Runge-Kutta (ode45) với điều kiện đầu

$$\theta(0) = \pi / 12 \text{ rad}, \quad \dot{\theta}(0) = 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad \dot{\varphi}(0) = 20 \text{ rad/s}$$

đưa ra kết quả dạng đồ thị trong khoảng $t = [0 \dots 2]\text{s}$.



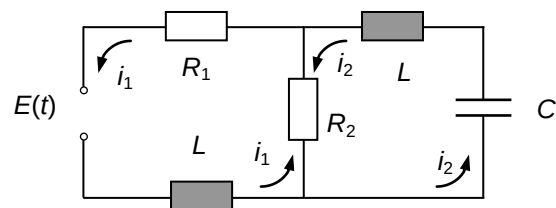
Bài 20.

Sử dụng định luật Kirchhoff ta nhận được phương trình vi phân của mạch điện (hình vẽ) như sau:

$$L \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + R_2 (i_1 - i_2) = E(t)$$

$$L \frac{di_2}{dt} - R_2 (i_1 - i_2) + \frac{q_2}{C} = 0$$

$$\frac{dq_2}{dt} = i_2$$



Với các số liệu $R_1 = 4\Omega$, $R_2 = 10\Omega$, $L = 0.032\text{H}$, $C = 0.53\text{F}$ và

$$E(t) = \begin{cases} 20 \text{ V} & \text{khi } 0 < t < 0.005 \text{ s} \\ 0, & \text{khi } t \geq 0.005 \text{ s} \end{cases}$$

Hãy giải hệ phương trình vi phân trên bằng ode45 và vẽ ra đồ thị các dòng điện $i_1(t)$, $i_2(t)$ theo thời gian $t = 0 \dots 0.05 \text{ s}$.

4. Mô hình một số hệ cơ

Bài 21.

Tay máy hai bậc tự do chuyển động trong mặt phẳng thẳng đứng. Khâu 1 chiều dài $OA = L_1$, khối tâm C_1 , $OC_1 = a_1$, khối lượng m_1 , mômen quán tính đối với khối tâm J_1 . Khâu 2 chiều dài $AE = L_2$, khối tâm C_2 , $AC_2 = a_2$, khối lượng m_2 , mômen quán tính đối với khối tâm J_2 . Động cơ 1 gắn liền với giá cố định tạo ra mômen ngẫu lực u_1 , động cơ 2 gắn liền với khâu 1 tạo ra mômen ngẫu lực u_2 .

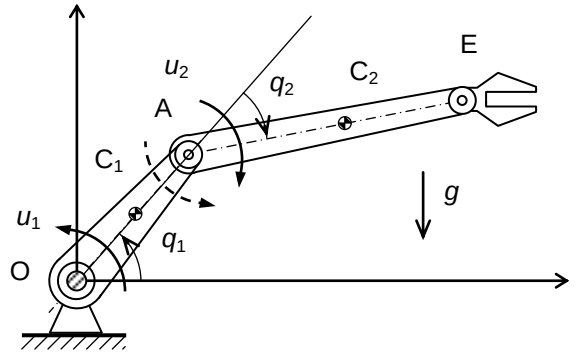
1. Lập PTVP chuyển động của tay máy, viết các phương trình dạng ma trận:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{B}\mathbf{u}$$

2. Mô phỏng chuyển động của tay máy khi biết mômen động cơ u_1 và u_2 .

$$u_1 = -k_{p1}(q_1 - q_{10}) - k_{d1}\dot{q}_1$$

$$u_2 = -k_{p2}(q_2 - q_{20}) - k_{d2}\dot{q}_2$$



Các thông số:

Stt	m_1 [kg]	J_1 [kgm ²]	L_1 [m]	a_1 [m]	m_2 [kg]	J_2 [kgm ²]	L_2 [m]	a_2 [m]	k_{p1}	k_{d1}	k_{p2}	k_{d2}
1	10	3	0.50	0.20	10	3	0.50	0.20	40	20	40	20
2	20	4	0.55	0.15	20	4	0.55	0.15	40	20	40	20
3	30	5	0.62	0.25	30	5	0.62	0.25	40	20	40	20
4	10	6	0.70	0.10	10	6	0.70	0.10	40	20	40	20
5	20	7	0.44	0.25	20	7	0.44	0.25	40	20	40	20
6	30	6	0.50	0.30	30	6	0.50	0.30	40	20	40	20
7	10	4	0.66	0.45	10	4	0.66	0.45	40	20	40	20
8	20	3	0.70	0.20	20	3	0.70	0.20	40	20	40	20

Các góc q_{10} , q_{20} tùy chọn trong khoảng giới hạn, ($q_{10} \in [0 \dots \pi/2]$ và $q_{20} \in [-\pi/2 \dots \pi/2]$).

Bài 22.

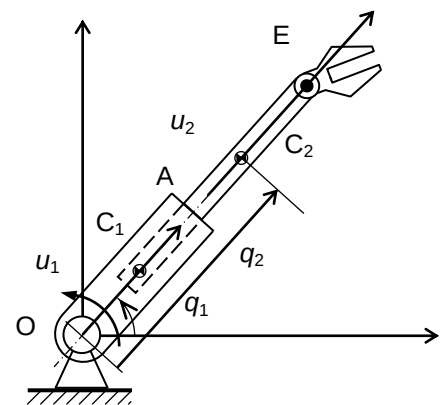
Tay máy hai bậc tự do chuyển động trong mặt phẳng thẳng đứng. Khâu 1 chiều dài $OA = L_1$, khối tâm C_1 , $OC_1 = a_1$, khối lượng m_1 , mômen quán tính đối với khối tâm J_1 . Khâu 2 chiều dài $AE = L_2$, khối tâm C_2 , $AC_2 = a_2$, khối lượng m_2 , mômen quán tính đối với khối tâm J_2 . Động cơ 1 gắn liền với giá cố định tạo ra mômen ngẫu lực M_1 , động cơ 2 gắn liền với khâu 1 tạo ra mômen ngẫu lực M_2 .

- Lập PTVP chuyển động của tay máy, viết dạng

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{B}\mathbf{u}$$

- Mô phỏng chuyển động của tay máy khi biết mômen động cơ u_1 và lực đẩy u_2 .

$$u_1 = -k_{p1}(q_1 - q_{10}) - k_{d1}\dot{q}_1, \quad u_2 = -k_{p2}(q_2 - q_{20}) - k_{d2}\dot{q}_2$$



Sử dụng các bộ thông số sau:

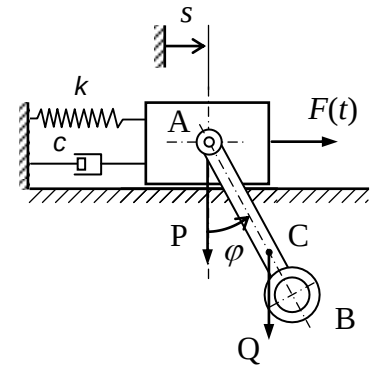
Stt	m_1 [kg]	J_1 [kgm ²]	L_1 [m]	a_1 [m]	m_2 [kg]	J_2 [kgm ²]	L_2 [m]	a_2 [m]	k_{p1}	k_{d1}	k_{p2}	k_{d2}
1	10	3	0.50	0.20	10	3	0.50	0.20	40	20	40	20
2	20	4	0.55	0.15	20	4	0.55	0.15	40	20	40	20
3	30	5	0.62	0.25	30	5	0.62	0.25	40	20	40	20
4	10	6	0.70	0.10	10	6	0.70	0.10	40	20	40	20
5	20	7	0.44	0.25	20	7	0.44	0.25	40	20	40	20

6	30	6	0.50	0.30		30	6	0.50	0.30		40	20	40	20
7	10	4	0.66	0.45		10	4	0.66	0.45		40	20	40	20
8	20	3	0.70	0.20		20	3	0.70	0.20		40	20	40	20

với các giá trị q_{10} và q_{20} tùy chọn trong khoảng giới hạn, ($q_{10} \in [0 \dots \pi/2]$ và $q_{20} \in [L_1 \dots 2L_1]$).

Bài 23.

Vật A trọng lượng $P = m_1g$, trượt không ma sát trên nền ngang. Con lắc AB trọng lượng $Q = m_2g$, khối tâm C, $AC = a$, mômen quán tính đối với khối tâm C: J_2 , được nối vào A bằng một bản lề trụ. Lò xo độ cứng k , ở trạng thái tự nhiên khi $s = 0$ (s là khoảng dịch chuyển của A). Cần nhớt hệ số c . Lực $F(t)$ nằm ngang tác dụng lên vật A. Chọn tọa độ suy rộng cho hệ là $\mathbf{q}^T = [s, \varphi]$.



- Lập PTVP chuyển động của hệ.
- Mô phỏng chuyển động của hệ biết lực kích động $F(t) = F_0 \sin(\Omega t)$.
- Thêm vào bài toán trên trường hợp giữa vật A và nền có ma sát khô với hệ số $\mu = 0.2$ (nâng cao).

Sử dụng các thông số sau:

Stt	m_1 [kg]	m_2 [kg]	J_2 [kgm ²]	a [m]	k [N/m]	c [Ns/m]	F_0	Ω	μ
1	10	10	3	0.20	10000	00	100	100	0.1
2	20	20	4	0.15	15000	150	120	50	0
3	30	30	5	0.25	12000	100	150	100	0.1
4	10	10	6	0.10	16000	0	200	150	0.2
5	20	20	7	0.25	20000	120	300	120	0
6	30	30	6	0.30	12000	200	150	120	0.2
7	10	10	4	0.45	13000	0	160	170	0.1
8	20	20	3	0.20	15000	0	200	160	0

5. Bài toán dao động

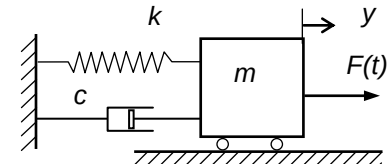
Bài 24.

Hệ dao động gồm khối lượng - lò xo - cần nhớt có phương trình vi phân mô tả như sau:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = F_0 \sin \Omega t$$

với $m = 2\text{kg}$, $c = 60\text{N.s/m}$, $k = 450\text{N/m}$, $F_0 = 4.5\text{N}$, $\Omega = 20\text{s}^{-1}$.

Điều kiện đầu $y(0) = 0.01\text{ m}$, $\dot{y}(0) = 0$.



a) Hạ bậc đưa về hệ phương trình vi phân bậc nhất.

b) Thực hiện tích phân số (giải các phương trình vi phân) trong khoảng $t = 0 \dots 10\text{s}$. Đưa ra các kết quả dạng đồ thị $y(t)$ và $\dot{y}(t)$; đồ thị quỹ đạo pha trong mặt phẳng pha $(y, \dot{y})$; và đồ thị trong không gian trạng thái 3D (có cả trục thời gian t): $(t, y, \dot{y})$.

Bài 25. Con lắc đơn

Xét con lắc toán học là một quả cầu nhỏ, khối lượng m treo vào thanh mảnh cứng dài l không khối lượng. Thanh này nối với giá cố định bằng bản lề trụ. Phương trình vi phân chuyển động của con lắc trong trường hợp không cản:

$$ml^2\ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi = 0 \Rightarrow \ddot{\varphi} = -(g/l) \sin \varphi$$

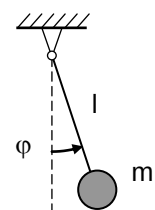
Nếu kể đến lực cản tỷ lệ với vận tốc hệ số d , lực cản $F_c = dv = dl\dot{\varphi}$, ta có

$$ml^2\ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi - dl^2\dot{\varphi}$$

Đặt $y_1 = \varphi$, $y_2 = \dot{\varphi}$, ta có

$$\dot{y}_1 = y_2$$

$$\dot{y}_2 = -\frac{1}{ml^2} (mgl \sin y_1 + dl^2 y_2) = -(g/l) \sin y_1 - (d/m) y_2$$



Con lắc toán

Viết m-file mô tả phương trình vi phân trên, sau đó sử dụng ode45 mô phỏng dao động của con lắc. Sử dụng các số liệu sau: con lắc có khối lượng $m = 0.25$ kg, chiều dài dây $l = 0.5$ m, với các góc lệch ban đầu khác nhau từ 10 đến 110 độ cách nhau 10 độ (khi tính toán cần đổi sang rad), hệ số cản $d = 0$.

Xét trường hợp dao động nhỏ, ta có thể tuyến tính hóa quanh vị trí cân bằng và nhận được phương trình vi phân:

$$\dot{y}_1 = y_2, \quad \dot{y}_2 = -(g/l)y_1 - (k/m)y_2.$$

Thực hiện lại các mô phỏng trên với mô hình đã được tuyến tính hóa. Đưa ra các nhận xét.

Bài 26. Xét dao động 1 dof (xét 3 trường hợp: bình thường, cộng hưởng, và phách)

Xét hệ dao động cưỡng bức không cản có phương trình vi phân như sau

$$\ddot{y} + 16y = \sin(\Omega t) \text{ với điều kiện đầu } y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0.$$

Bằng cách đặt $x_1 = y, \quad x_2 = \dot{y}$, ta nhận được hệ hai phương trình vi phân cấp một:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -16x_1 + \sin(\Omega t)$$

Hãy viết m-file mô tả phương trình vi phân trên. Sau đó sử dụng ode45 hoặc simulink để khảo sát đáp ứng của hệ trong ba trường hợp: (a) $\Omega = 5$ rad/s; (b) $\Omega = 4.2$ rad/s; (c) $\Omega = 4.0$ rad/s.

Bài 27. Con lắc đơn dây treo đàn hồi

Xét con lắc là một quả cầu nhỏ được treo vào lò xo có độ cứng c , chiều dài tự nhiên là l . Hệ hai bậc tự do với các tọa độ suy rộng s, φ . Động năng và thế năng của hệ:

$$T = \frac{1}{2} m[(l+s)^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{s}^2], \quad \Pi = \frac{1}{2} cs^2 - mg(l+s) \cos \varphi$$

Sử dụng phương trình Lagrange loại 2 ta nhận được phương trình vi phân chuyển động của con lắc như sau:

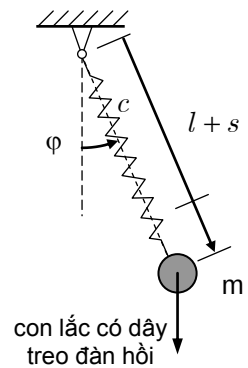
$$m(l+s)^2 \ddot{\varphi} + 2m(l+s)\dot{s}\dot{\varphi} + mg(l+s) \sin \varphi = 0$$

$$m\ddot{s} - m(l+s)\dot{\varphi}^2 - mg \cos \varphi + cs = 0$$

Sử dụng ode45 mô phỏng chuyển động của hệ với các thông số:

$$m = 0.5 \text{ kg}; \quad L = 0.5 \text{ m}; \quad c = 50 \text{ N/m}; \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2;$$

và điều kiện đầu: $\varphi(0) = \pi/6, \dot{\varphi}(0) = 0, s(0) = 0, \dot{s}(0) = 0$.



con lắc có dây treo đàn hồi

Bài 28. Con lắc kép

Phương trình vi phân chuyển động của con lắc kép nhận được nhờ phương trình Lagrange 2 được viết gọn lại ở dạng ma trận như sau:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = 0$$

với

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 & m_2 l_1 l_2 \cos(q_1 - q_2) \\ m_2 l_1 l_2 \cos(q_1 - q_2) & m_2 l_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} 0 & m_2 l_1 l_2 \sin(q_1 - q_2) \dot{q}_2 \\ -m_2 l_1 l_2 \sin(q_1 - q_2) \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} (m_1 l_1 + m_2 l_2) g \sin q_2 & m_2 g l_2 \sin q_2 \end{bmatrix}^T.$$

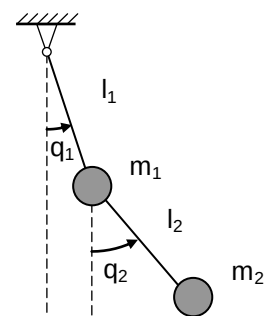
Viết m-file thể hiện phương trình vi phân hệ, sau đó sử dụng ode45 mô phỏng chuyển động của hệ. Sử dụng các thông số sau:

$$m_1 = 0.25; \quad l_1 = 0.5; \quad m_2 = 0.25; \quad l_2 = 0.5; \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2;$$

Ban đầu hệ đứng yên với các góc lệch:

$$q_1(0) = 10 \cdot \pi / 180, \quad q_2(0) = 16 \cdot \pi / 180.$$

Tuyến tính hóa phương trình vi phân chuyển động quanh vị trí cân bằng $q_1 = q_2 = 0$. Tính tần số dao động riêng của hệ.



Con lắc kép

Bài 29. Dao động nhỏ của con lắc elliptic

Xét con lắc elliptic như hình vẽ. Xe A có khối lượng m_1 chuyển động trên đường ngang, lò xo có độ cứng c . Dây AB có chiều dài l , khối lượng không đáng kể và luôn căng. Tải trọng được coi như chất điểm có khối lượng m_2 . Biết khi $x = 0$ lò xo không bị biến dạng. Sử dụng phương trình Lagrange loại 2, ta nhận được phương trình vi phân chuyển động:

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2 l \ddot{\varphi} \cos \varphi - m_2 l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi + cx = 0,$$

$$m_2 l^2 \ddot{\varphi} + m_2 l \ddot{x} \cos \varphi + m_2 g l \sin \varphi = 0$$

Mô phỏng đáp ứng của hệ với điều kiện đầu:

$$x(0) = 0, \varphi(0) = \pi / 6, \dot{x}(0) = 0, \dot{\varphi}(0) = 0.$$

Trường hợp xét dao động nhỏ, coi $\sin \varphi \approx \varphi, \cos \varphi \approx 1$ và bỏ qua số

hạng phi tuyến $\dot{\varphi}^2$, ta nhận được phương trình vi phân dao động nhỏ.

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2 l \ddot{\varphi} + cx = 0, \quad m_2 l \ddot{x} + m_2 l^2 \ddot{\varphi} + m_2 g l \varphi = 0$$

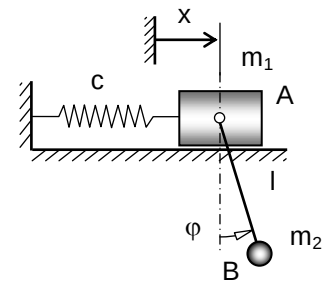
hay ở dạng ma trận

$$\begin{bmatrix} m_1 + m_2 & m_2 l \\ m_2 l & m_2 l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & m_2 g l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tính các tần số dao động riêng và các dạng dao động riêng của hệ.

Sử dụng các thông số sau:

$$\begin{array}{llll} m_1 = 50; & m_2 = 40; & \% \text{ kg} & g = 9.81; & \% \text{ m/s}^2 \\ l = 5; & & \% \text{ m} & c = 2000; & \% \text{ N/m} \end{array}$$



Con lắc elliptic

Bài 30. Hệ dao động ba bậc tự do

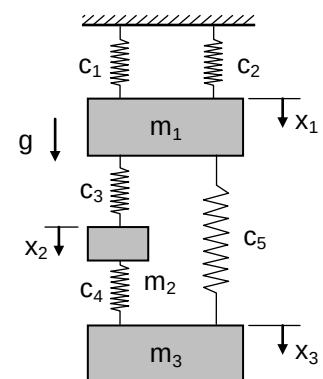
Cho hệ dao động ba bậc tự do như trên hình vẽ. Các lò xo tuyến tính có độ cứng c_i , khối lượng các vật nặng là m_i , ($i = 1, 2, 3$). Gọi x_i là dịch chuyển của các khối lượng kể từ vị trí mà các lò xo không bị biến dạng. Áp dụng phương pháp tách vật (hoặc phương trình Lagrange loại 2) nhận được phương trình vi phân chuyển động ở dạng ma trận như sau:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{p}, \quad \mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$$

với

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} m_1 g \\ m_2 g \\ m_3 g \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 + c_3 + c_5 & -c_3 & -c_5 \\ -c_3 & c_3 + c_4 & -c_4 \\ -c_5 & -c_4 & c_4 + c_5 \end{bmatrix},$$



Hệ dao động 3 dof

Cho biết các thông số của hệ:

$$c_1 = c_2 = c_3 = 10 \text{ N/mm}, \quad c_4 = c_5 = 5 \text{ N/mm},$$

$$m_1 g = m_3 g = 98.1 \text{ N}, \quad m_2 g = m_3 g.$$

1. Tìm vị trí cân bằng tĩnh của hệ, bằng cách giải hệ phương trình đại số tuyến tính để tìm biến dạng của các lò xo

$$\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{p}.$$

2. Tìm các tần số dao động riêng và các dạng dao động riêng của hệ từ phương trình dao động tự do

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Bài 31.

Mô hình dao động nhỏ của ô-tô trong mặt phẳng thẳng đứng như hình vẽ. Cho biết các thông số của hệ: $a = 3 \text{ m}$, $b = 1 \text{ m}$, $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 100 \text{ Ns/m}$, $k_1 = k_2 = 4 \times 10^5 \text{ N/m}$, $k_3 = k_4 = 30 \times 10^5 \text{ N/m}$, $M = 1200 \text{ kg}$, $m = 30 \text{ kg}$, $J = 200 \text{ kgm}^2$.

1. Lập phương trình VPCĐ của hệ (đáp án như sau):

$$\frac{Mb^2 + J}{(a+b)^2} \ddot{y}_1 + \frac{Mab - J}{(a+b)^2} \ddot{y}_2 + c_1 \dot{y}_1 - c_1 \dot{y}_3 + k_1 y_1 - k_1 y_3 = \frac{d}{a+b} F(t)$$

$$\frac{Mab - J}{(a+b)^2} \ddot{y}_1 + \frac{Ma^2 + J}{(a+b)^2} \ddot{y}_2 + c_2 \dot{y}_2 - c_2 \dot{y}_4 + k_2 y_2 - k_2 y_4 = \frac{a+b-d}{a+b} F(t)$$

$$m \ddot{y}_3 - c_1 \dot{y}_1 + (c_1 + c_2) \dot{y}_3 - k_1 y_1 + (k_1 + k_3) y_3 = 0$$

$$m \ddot{y}_4 - c_1 \dot{y}_2 + (c_2 + c_4) \dot{y}_4 - k_2 y_2 + (k_2 + k_4) y_4 = 0$$

2. Viết PTVP CĐ dạng ma trận

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y} = \mathbf{f}(t)$$

3. Xét dao động tự do không cản:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y} = \mathbf{0}$$

Tìm các tần số dao động riêng và các dạng dao động riêng.

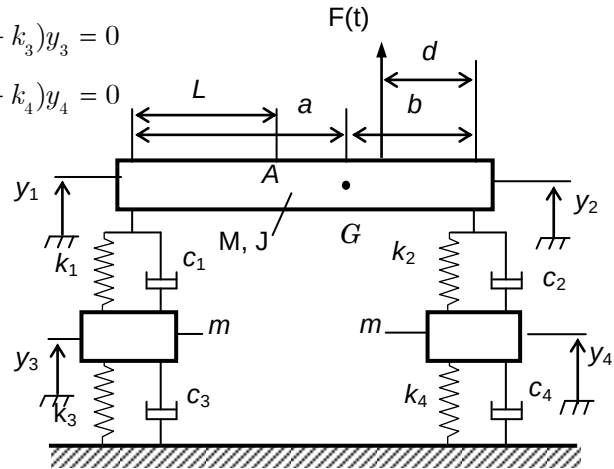
4. Cho lực kích động

$$F(t) = m_0 r \Omega^2 \cos \Omega t,$$

với $m_0 = 5 \text{ kg}$, $r = 0.2 \text{ m}$, $\Omega = 200 \text{ rad/s}$

Vẽ đường cong biên độ tần số của điểm A cách đuôi xe một đoàn L , $y_A(\Omega)$.

5. Với các thông số trên xác định các đáp ứng của các tọa độ $y_i(t)$ ($i = 1, 2, 3, 4$). Biết rằng xe dao động từ trạng thái đứng yên.



Bài 32.

Phương trình vi phân dao động cưỡng bức của hệ tuyến tính n bậc tự do được cho dạng ma trận như sau

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}(t), \text{ với điều kiện đầu } \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0, \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = \dot{\mathbf{q}}_0.$$

với $\mathbf{q}$ là vectơ tọa độ suy rộng, $\mathbf{M}, \mathbf{D}, \mathbf{K}$ là các ma trận vuông cấp n , tương ứng là ma trận khối lượng, ma trận cản, và ma trận độ cứng. Vectơ lực kích động $\mathbf{f}(t)$.

Bằng cách hạ bậc ta nhận được

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v}$$

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{f}(t) - \mathbf{D}\mathbf{v} - \mathbf{K}\mathbf{q})$$

Hãy viết các m-file thể hiện các phương trình vi phân và thực hiện việc giải số tìm dao động của hệ, với

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 10 & -10 & 0 \\ -10 & 20 & -10 \\ 0 & -10 & 10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1000 & -1000 & 0 \\ -1000 & 2000 & -1000 \\ 0 & -1000 & 1000 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 5 \sin 10t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

6. Một số hệ cơ điện

Bài 33. Mô hình động cơ điện một chiều

Phương trình vi phân mô tả động học của động cơ điện một chiều như sau:

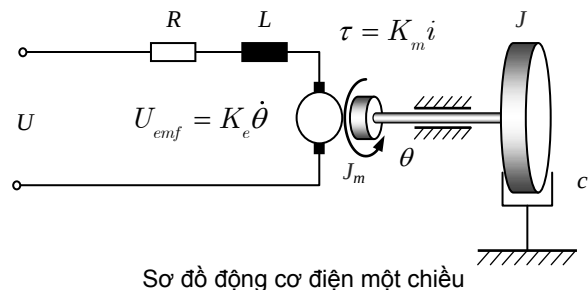
$$(J_m + J) \frac{d^2 \theta}{dt^2} + c \frac{d\theta}{dt} = T(t) = K_m i(t)$$

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + K_e \frac{d\theta}{dt} = V(t)$$

Hãy hạ bậc đưa hệ trên về hệ phương trình vi phân bậc nhất với các biến trạng thái

$$\mathbf{x} = [\theta, \dot{\theta}, i]^T$$

Sử dụng ode45 mô phỏng đáp ứng của động cơ với điện áp đặt là hằng số, $V(t) = 10 \text{ Volt}$. Sử dụng bộ thông số:



Sơ đồ động cơ điện một chiều

$$L = 275 \mu H = 275 \cdot 10^{-6} H,$$

$$R = 13,6 \Omega$$

$$K_e = 0,257 \text{ mV/rmp} = 0,257 \cdot 10^{-3} \frac{30}{\pi} \text{ V/}[\text{rad/s}]$$

$$K_m = 2,46 \text{ mNm/A} = 2,46 \cdot 10^{-3} \text{ Nm/A},$$

$$c = 10 [\text{rad/s}]/\text{Nm}$$

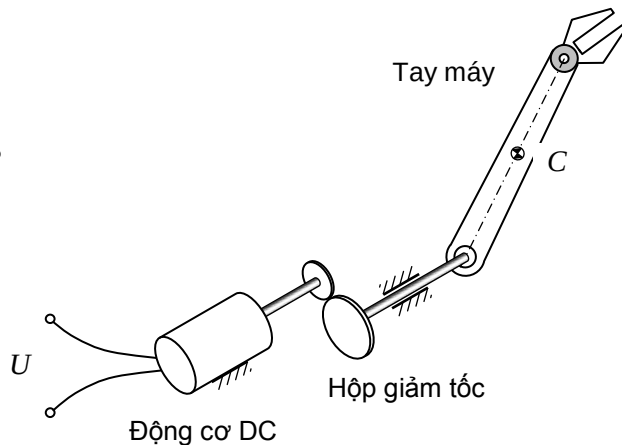
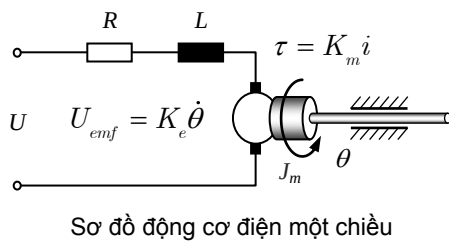
$$J_m = 0,08 \text{ gcm}^2 = 0,08 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-4} \text{ kgm}^2,$$

$$J = 50 J_m$$

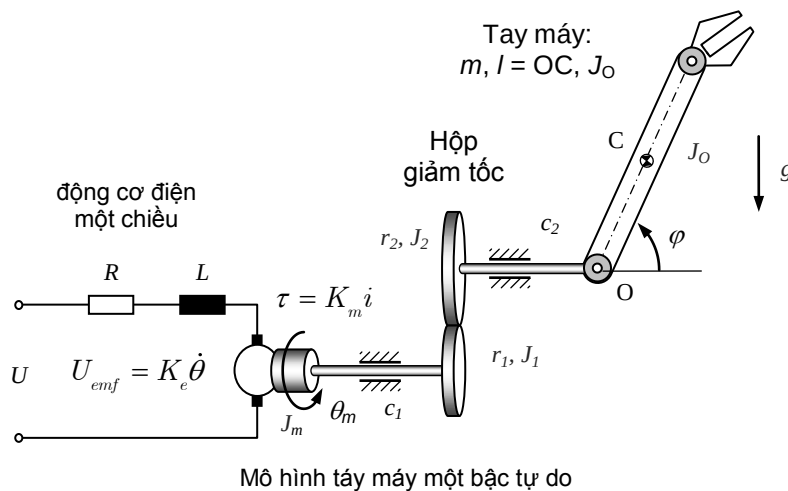
Bài 34. Tay máy 1 dof – dẫn động bằng động cơ điện một chiều.

Xét tay máy một bậc tự do được dẫn động bởi động cơ một chiều như trên hình vẽ. Các thông số của hệ gồm:

- Tay máy là vật rắn quay quanh trục ngang cố định qua O, khối lượng m , khối tâm C, $OC = l$. Mômen quán tính đối với trục quay O, J_O . Hệ số cản tại ổ trục c_2 .
- Hộp giảm tốc có tỷ số truyền $r = \omega_1 / \omega_2 = r_2 / r_1$, mômen quán tính khối của các bánh răng tương ứng là J_1, J_2 .
- Động cơ điện một chiều: điện trở R_a , cuộn cảm có hệ số tự cảm L , hằng số phản sức điện động của rô-to, K_e ; hằng số mômen K_m . Ở đây θ là góc quay của trục động cơ, $\dot{\theta}$ là vận tốc góc trên trục động cơ. Mômen quán tính khối của rô-to J_m . Hệ số cản nhớt tại ổ trục c_1 (ma sát nhớt tại ổ trục).



1. Sử dụng phương pháp tách cấu trúc để thiết lập phương trình vi phân mô tả hệ. (chia thành 2 hoặc 3 hệ con).

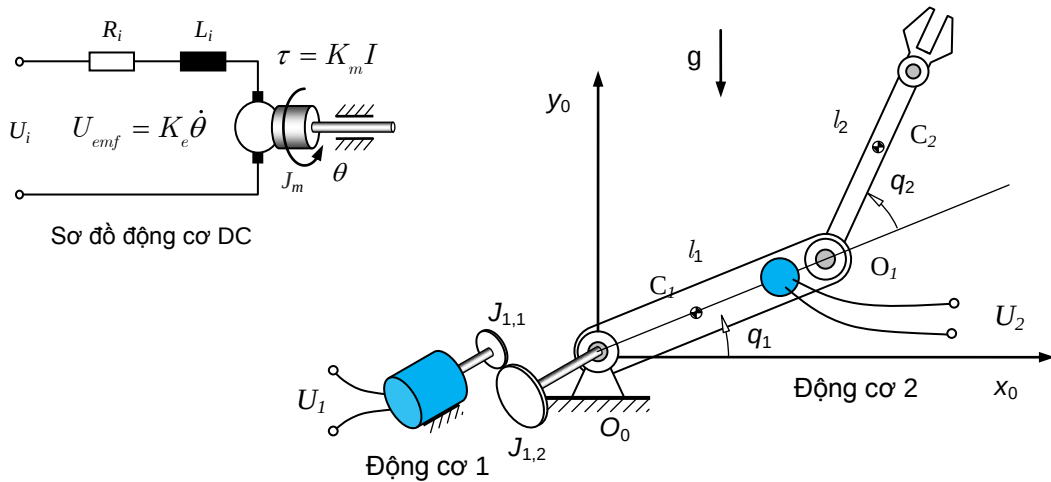


2. Sử dụng phương trình Lagrange để thiết lập phương trình vi phân mô tả hệ.
3. Hãy đơn giản hóa phương trình vi phân chuyển động cho tay máy, bằng cách bỏ qua sự thay đổi của dòng điện, $L di(t) / dt \approx 0$.
4. Sử dụng matlab-simulink mô phỏng chuyển động của hệ, với các thông số hệ:
 - % - DC motor: $R_a=1, L_a=0.0001, K_e=1, K_m=1, J_m=0.001, b_1=0.1$;
 - % - Tay máy: $m=5, l_c=0.5, g=9.81, J_O=0.2, b_2=0.00000002$;

% - hộp giảm tốc: tỉ số truyền $r = 2.0$

Bài 35. Tay máy phẳng hai khâu, hai khớp quay - 2 dof – dẫn động bằng động cơ điện một chiều.

Tay máy phẳng hai bậc tự do chuyển động trong mặt phẳng đứng. Tay máy này được dẫn động bằng hai động cơ điện một chiều, động cơ 1 đặt cố định trên giá và động cơ 2 đặt trên khâu 1. Chuyển động của trục động cơ được truyền ra thành góc quay của khâu nhờ hộp giảm tốc bánh răng.



Mô hình tay máy phẳng hai bậc tự do

Các thông số của hệ thống được cho như sau:

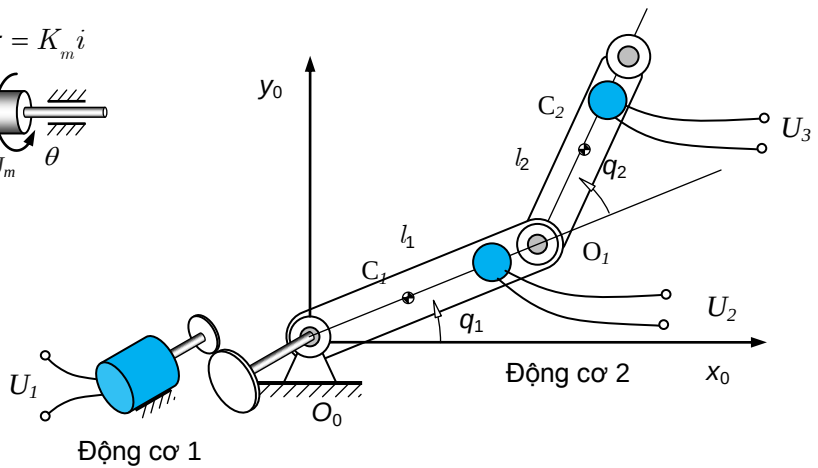
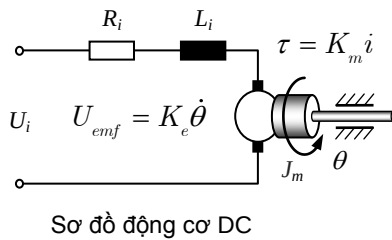
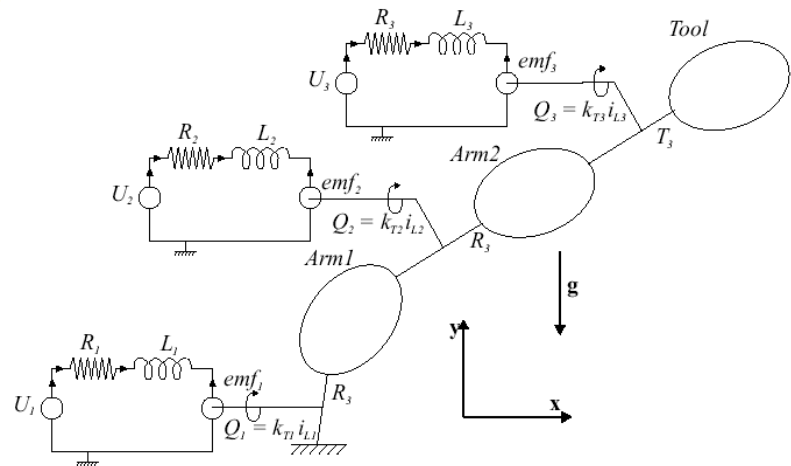
Các thông số	Động cơ 1	Động cơ 2
Điện trở, hằng số mômen, hằng số phản sức điện động, hằng số cuộn cảm, mômen quán tính roto	$R_{1a}, K_{1m}, K_{1e}, L_{1a}, J_{1m}$	$R_{2a}, K_{2m}, K_{2e}, L_{2a}, b_{21}, J_{2m}$
	Hộp giảm tốc 1	Hộp giảm tốc 2
Tỷ số truyền, mômen quán tính khối hai bánh răng	$i_1, J_{1,1}, J_{1,2}$	$i_2, J_{2,1}, J_{2,2}$
	Khâu 1 (kể cả động cơ 2 đặt trên nó)	Khâu 2
Khối lượng, mômen quán tính đối với trục qua khối tâm, khoảng cách từ khớp quay đến khối tâm	m_1, J_{C1}, l_{C1}	m_2, J_{C2}, l_{C2}

- Sử dụng phương trình Lagrange để thiết lập phương trình vi phân mô tả hệ.
- Hãy đơn giản hóa phương trình vi phân chuyển động cho tay máy, bằng cách bỏ qua sự thay đổi của dòng điện, $LdI(t)/dt \approx 0$.
- Sử dụng Matlab và simulink mô phỏng đáp ứng của hệ, với bộ điều khiển PD và bộ điều khiển PD cộng bù trọng lực. Các thông số của hệ cho bằng 1.

Bài 36. Tay máy Scara 3dof RRT – dẫn động bằng động cơ điện một chiều.

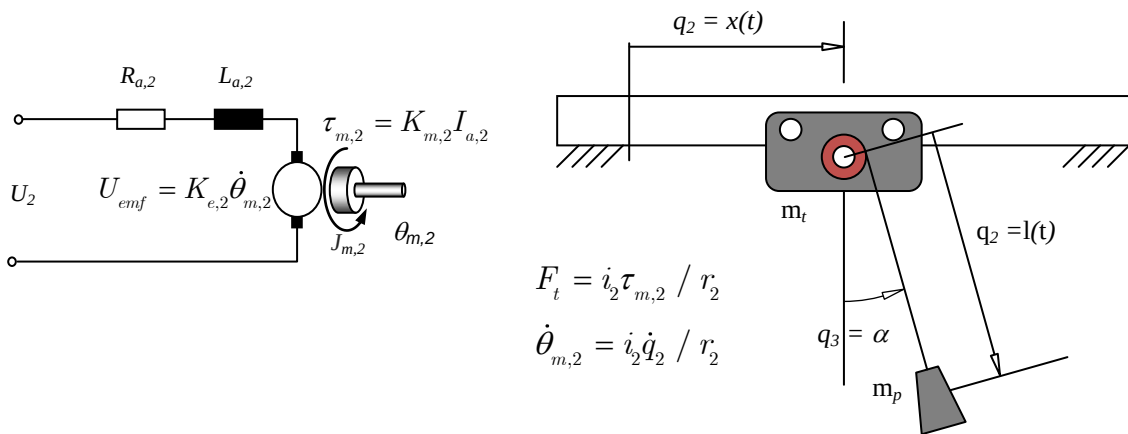
Hãy xây dựng mô hình cơ điện cho tay máy Scara 3 dof (RRT) dẫn động bằng 3 động cơ DC. Sau đó:

- Sử dụng phương trình Lagrange để thiết lập phương trình vi phân mô tả hệ.
- Hãy đơn giản hóa phương trình vi phân chuyển động cho tay máy, bằng cách bỏ qua sự thay đổi của dòng điện, $LdI(t)/dt \approx 0$.



Bài 37. Mô hình hóa cầu trục 2D – hệ 3dof dẫn động bằng 2 động cơ DC

Hãy xây dựng mô hình hệ cơ điện cho cầu trục chuyển động trong mặt phẳng: động cơ 1 làm xe goòng chuyển động ngang; động cơ 2 đặt trên xe goòng cuốn nhả cáp để nâng hạ vật, trong khi chuyển động vật nâng bị lắc. Hệ 3 dof nhưng dẫn động chỉ bằng 2 động cơ DC.



- Sử dụng phương trình Lagrange để thiết lập phương trình vi phân chuyển động cho hệ.
- Hãy đơn giản hóa phương trình vi phân chuyển động bằng cách bỏ qua sự thay đổi của dòng điện, $L di(t) / dt \approx 0$.
 - Đưa ra phương trình vi phân chuyển động trong trường hợp này. Viết phương trình ở dạng

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{q} = [x, l, \alpha]^T, \quad \mathbf{u} = [U_1, U_2]^T$$

- b) Tuyến tính hóa phương trình vi phân chuyển động quanh vị trí cân bằng $l = l_0 = \text{const}, \alpha = 0$, để nhận được phương trình trạng thái dạng:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{x} = [x, l, \alpha, \dot{x}, \dot{l}, \dot{\alpha}]^T, \quad \mathbf{u} = [U_1, U_2]^T$$

Sau đó khảo sát ổn định của vị trí cân bằng khi chưa có điều khiển, khảo sát tính điều khiển được của hệ.

- c) Thiết kế bộ điều khiển để ổn định hóa vị trí cân bằng, với

$$U_1 = -(K_1(x - x_0) + K_2\theta + K_3\dot{x} + K_4\dot{\alpha})$$

$$U_2 = -(K_5(l - l_0) + K_6\dot{l})$$

Cho biết các thông số của hệ:

- Động cơ DC: $K_m = 1, K_e = 1, R = 1, L = 0.0001$,

$$r = 3, J_m = 0.001, (\text{tỷ số truyền, mômen quán tính rô to})$$

- Xe goòng và tời cuốn cáp: $r_{bx} = 0.04, r_{toi} = 0.02$ (bán kính bánh xe xe goòng, bán kính tời cuốn dây)

$$m_t = 2, m_p = 2, g = 9.81.$$

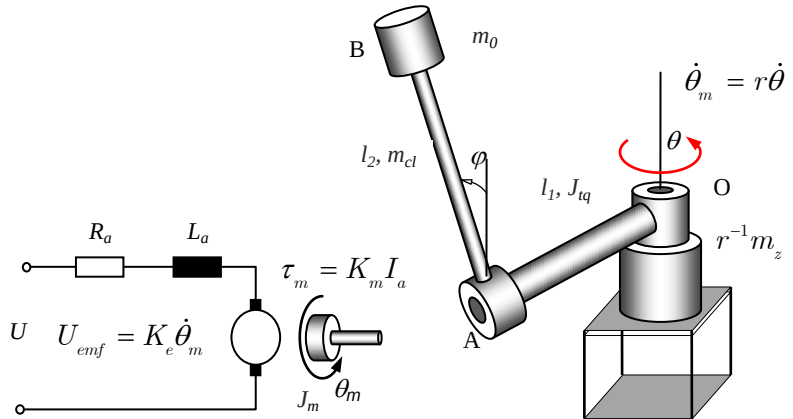
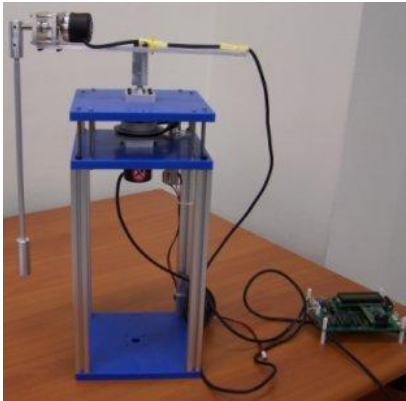
Bài 38. Con lắc ngược dẫn động quay

Con lắc ngược có điều khiển là một ví dụ tiêu biểu về hệ Cơ điện tử. Đó là một hệ thống huy dẫn động (underactuated system), hệ có số động cơ dẫn động nhỏ hơn số bậc tự do của nó. Đặc điểm của hệ này là có vị trí cân bằng không ổn định khi con lắc ở vị trí hướng lên.

Xét con lắc gồm tay quay OA quay quanh trục đứng (góc quay θ) – được dẫn động bằng động cơ DC – thông qua bộ truyền giảm tốc bánh răng. Tay quay có chiều dài $l_1 = OA$ và có mômen quán tính khối đối với trục quay z là J_{tq} .

Phần con lắc AB coi như thanh mảnh đồng chất khối lượng m_{cl} , chiều dài l_2 đầu B có gắn khối lượng m_0 coi như chất điểm. Thông số động cơ bao gồm: điện trở, hằng số mômen, hằng số phản sức điện động, hệ số tự cảm tương ứng là R_a, K_m, K_e, L_a .

Tỷ số truyền của hộp giảm tốc là $r = \dot{\theta}_m / \dot{\theta} > 1$.



1. Thiết lập phương trình vi phân chuyển động cho hệ với các tọa độ suy rộng: $\theta, \varphi, I_a = \dot{q}_1$; biến đầu vào điều khiển là $U(t)$.

2. Xét trường hợp bỏ qua sự biến thiên của dòng điện $L_a \dot{I}_a \approx 0$,

- a) Đưa ra phương trình vi phân chuyển động trong trường hợp này.

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{q} = [\theta, \varphi]^T, u = U$$

- b) Tuyến tính hóa phương trình vi phân chuyển động quanh vị trí cân bằng $\theta = 0, \varphi = 0$, để nhận được phương trình trạng thái dạng:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{x} = [\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}]^T, u = U$$

Sau đó khảo sát ổn định của vị trí cân bằng khi chưa có điều khiển, khảo sát tính điều khiển được của hệ.

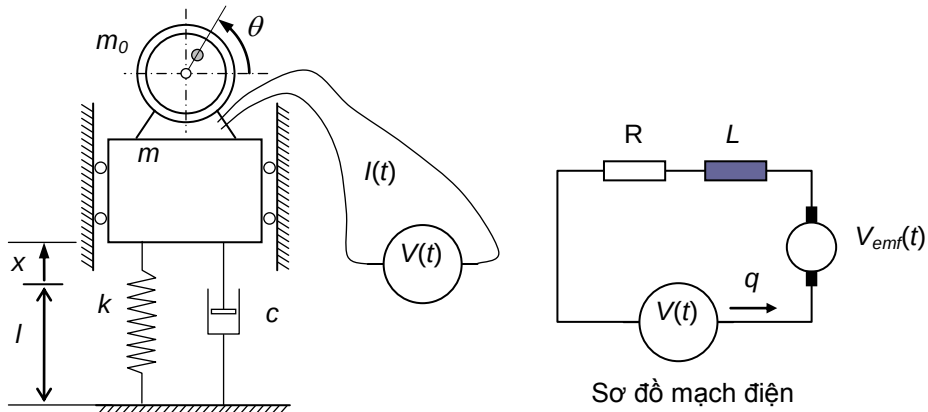
c) Thiết kế bộ điều khiển LQR để ổn định hóa vị trí cân bằng, với

$$U = -(K_1\theta + K_2\dot{\theta} + K_3\ddot{\theta} + K_4\dddot{\theta})$$

Bài 39.

7-39. Mô hình máy đầm rung động cơ điện – rô-tô lệch tâm

Động cơ điện một chiều kích từ độc lập được sử dụng để tạo dao động cho hệ thống. Rô-tô có khối lượng m_o , độ lệch tâm e , mômen quán tính $J_O = J_{\text{rôto}} = J_C + m_o e^2$. Vỏ động cơ cùng với bộ máy có khối lượng m , được đặt trên một hệ giảm chấn - lò xo có độ cứng k và cản nhớt hệ số c . Điện áp vào động cơ là $V(t)$. Mômen động cơ tỷ lệ với dòng điện trong mạch, $M = K_m i$; phản sức điện động khi rô-tô quay tỷ lệ với tốc độ quay rô-tô, $V_{\text{emf}} = K_e \omega = K_e \dot{\theta}$.

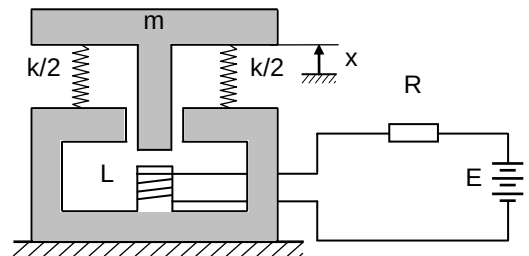


Hình bài 7-39

1. Sử dụng phương trình Lagrange để thiết lập phương trình vi phân chuyển động cho hệ.
2. Hãy đơn giản hóa phương trình vi phân chuyển động bằng cách bỏ qua sự thay đổi của dòng điện, $L di(t) / dt \approx 0$.

Bài 40. Thí dụ 5-6. (Bài tập cơ học ĐLH)

7-30. Sơ đồ máy ghi chấn động sử dụng điện cảm như trên hình. Lõi sắt động có khối lượng m , chuyển động tịnh tiến theo phương thẳng đứng, hai lò xo có độ cứng như nhau và có tổng độ cứng là k . Hệ số tự cảm của cuộn dây là $L(x)$. Cuộn cảm được nối với nguồn có sức điện động là $E = \text{const}$. Điện trở ôhm tổng cộng của mạch điện là R . Viết phương trình vi phân chuyển động và tìm vị trí cân bằng của của hệ.

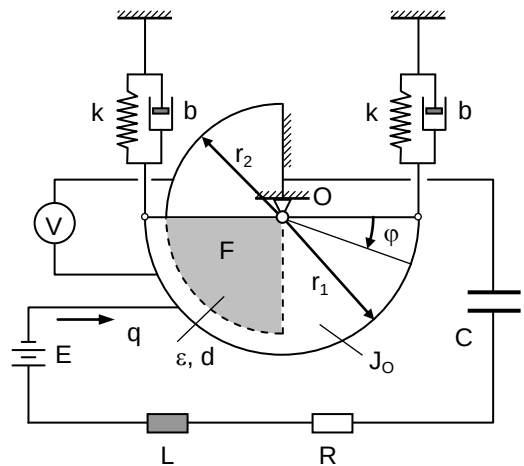


Hình bài 7-30

Bài 41.

7-31. Sơ đồ nguyên lý của một cảm biến gia tốc góc như trên hình vẽ. Tụ điện gồm hai tấm bán nguyệt bán kính tương ứng r_1, r_2 , khoảng cách giữa hai tấm là d , hằng số điện môi của môi trường cách điện giữa chúng là ϵ . Điện dung C của tụ được tính gần đúng tỷ lệ diện tích xếp chồng F , $C^* = \rho F / d$. Mômen quán tính khối của tấm động đối với trục quay O là J_o . Các lò xo có độ cứng k và không bị biến dạng khi góc $\varphi = 0$, và cản nhớt có hệ số cản b . Cho biết điện trở R , điện dung của tụ điện $C = \text{const}$, hệ số tự cảm L , điện áp nguồn một chiều E . Lập phương trình vi phân mô tả chuyển động của hệ theo tọa độ suy rộng φ, q (φ - góc xoay của tấm động, q - điện tích trên tụ C).

Tính điện áp trên đồng hồ đo V phụ thuộc vào điện tích.

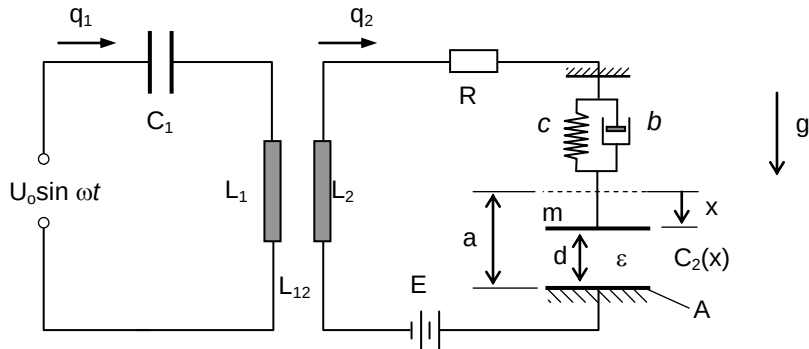


Hình bài 7-31

Bài 42.

7-32. Một hệ cơ điện gồm hai mạch điện tương tác qua lại nhờ máy biến áp (có hệ số điện cảm L_1, L_2, L_{12}). Mạch thứ nhất có nguồn điện xoay chiều $U(t) = U_0 \sin \omega t$ và tụ điện hằng số điện dung C_1 . Mạch thứ hai gồm điện trở R , nguồn điện một chiều điện áp U_1 và tụ điện dạng tấm chữ nhật có điện dung thay đổi (do khoảng cách giữa hai tấm thay đổi). Một tấm của tụ cố định còn tấm kia được treo vào hệ lò xo giảm chấn (c, b), lò xo không biến dạng khi khoảng cách giữa hai tấm là a . (Điện dung của tụ tính theo công thức $C = \epsilon A / d$, ϵ - hằng số điện môi). Lập phương trình vi phân mô tả chuyển động của hệ theo tọa độ suy rộng x, q_1, q_2 .

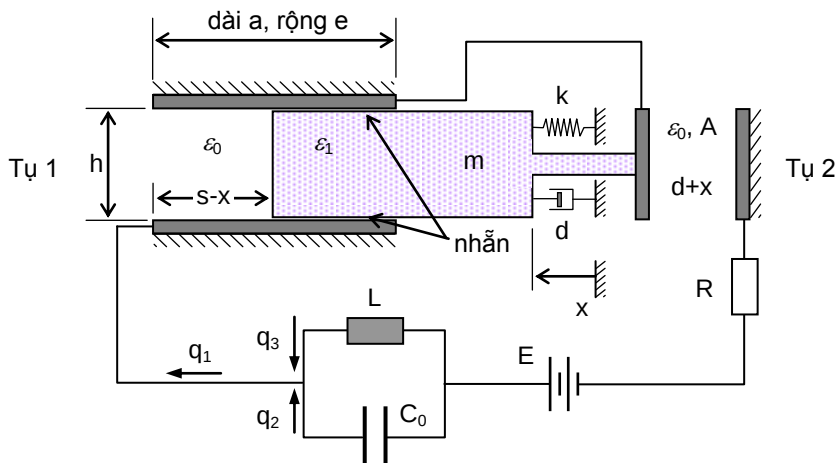
HD. Động năng điện tính theo công thức: $T^e = \frac{1}{2} (L_1 I_1^2 + 2L_{12} I_1 I_2 + L_2 I_2^2)$



Hình bài 7-32

Bài 43.

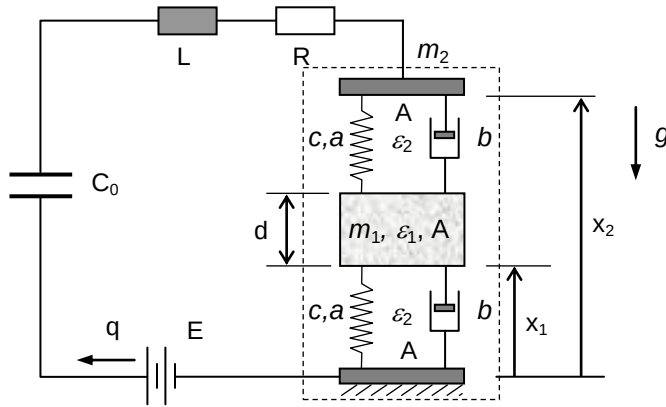
7-33. Một hệ cơ điện gồm nguồn điện một chiều E , điện trở R , cuộn cảm L mắc song song tụ điện C_0 . Hai tụ 1 và 2 có điện dung thay đổi do chất điện môi khối lượng m gắn với tấm của tụ 2 di chuyển, (ϵ_0, ϵ_1 là các hằng số điện môi). Lò xo độ cứng k (không biến dạng khi $x=0$), giảm chấn độ nhớt d . (Điện dung của tụ tính theo công thức $C = \epsilon A / d$). Lập phương trình vi phân mô tả chuyển động của hệ theo tọa độ suy rộng x, q_1, q_2 . HD. Có thể coi tụ 1 như được tạo thành bởi 2 tụ mắc song song.



Hình bài 7-33

Bài 44.

7-34. Một hệ cơ điện gồm cuộn cảm có hệ số từ cảm L , điện trở R , tụ điện điện dung $C_0 = \text{const}$, nguồn một chiều điện áp E và một tụ có điện dung thay đổi. Tụ điện này có dạng tấm hình chữ nhật diện tích tấm bằng A . Các tấm nối với nhau bằng lò xo độ cứng c , cản nhớt b , (đều không dẫn điện). Chiều dài khi không biến dạng của lò xo là a . Các hằng số điện môi giữa các tấm là ϵ_1, ϵ_2 . Lập phương trình vi phân chuyển động của hệ theo tọa độ suy rộng (x_1, x_2, q) . x_1, x_2 là dịch chuyển của các tấm, q là lượng điện tích trên tụ (dòng điện trong mạch là $i = \dot{q}$). HD. Có thể coi phần trong hình chữ nhật như được tạo thành bởi 3 tụ mắc nối tiếp.



Hình bài 7-34

Bài 45.

7-35. Một hệ cơ điện gồm nguồn một chiều điện áp E , điện trở R , tụ điện dạng tấm chữ nhật, diện tích các tấm là A , hằng số điện môi giữa hai tấm là ϵ_0 . Cuộn cảm có hệ số tự cảm $L(x)$. Lõi sắt khối lượng m

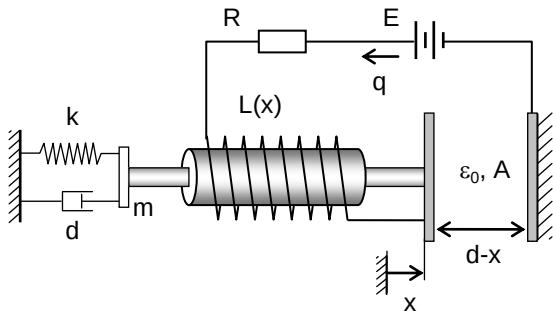
được gắn với một tấm của tụ điện, và được nối với

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{E}_{n \times n} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{F} \mathbf{t} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times 1} \\ \mathbf{f} \mathbf{t} \end{bmatrix};$$

$x, \dot{x} = 0, 0$ ở nhờ hệ lò

xo - giảm chấn (độ cứng k , cản nhớt hệ số c), lò xo không biến dạng khi $x = 0$. Lập phương trình vi phân chuyển động của hệ theo tọa độ suy rộng (x, q) , với x là dịch chuyển của các tấm động, q là lượng điện tích trên tụ (dòng điện trong mạch là $i = \dot{q}$).



ref. Francis C. Moon-Applied Dynamics With Applications to Multibody and Mechatronic Systems-John Wiley & Sons, Inc. (1998), p.404

Hình bài 7-35

Với $E = \text{const}$, hãy xác định vị trí cân bằng của hệ. Thực hiện tuyến tính hóa hệ phương trình vi phân chuyển động quanh vị trí cân bằng. Đưa hệ về dạng phương trình trạng thái sau đó xét tính ổn định của vị trí cân bằng.

Bài 46.

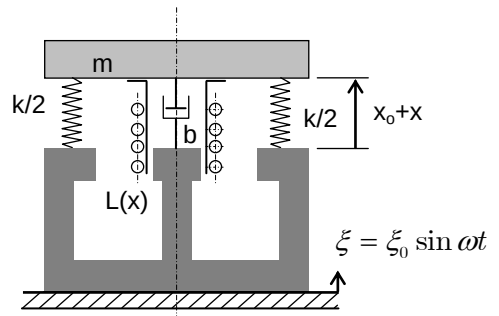
7-36. Trên hình vẽ cho một sơ đồ máy ghi địa chấn. Gắn trên bệ máy một cuộn tự cảm có n vòng dây với bán kính r và có điện trở Ôm tổng cộng là R và hệ số cản là L . Lõi sắt từ là một hình trụ đồng trục với cuộn tự cảm và gây ra trong khoảng không của nó một từ trường phẳng và xuyên tâm với hệ số cảm ứng B . Lõi sắt có khối lượng m và được đỡ bằng các lò xo có hệ số cứng tổng cộng là k và còn chịu tác dụng của lực cản nhớt $\beta \dot{x}$, trong đó x là độ chuyển dời tác dụng của lõi sắt từ tính từ vị trí cân bằng của nó. Nền rung theo quy luật $\xi = \xi_0 \sin \omega t$. Đóng kín mạch điện bằng cách nối liền hai cực cuộn tự cảm bằng dây dẫn có điện trở nhỏ không đáng kể. Hãy thiết lập phương trình vi phân chuyển động của hệ.

Cho biết các lực suy rộng do lực tác dụng tương hỗ giữa sắt từ và cuộn dây tự cảm là: $Q_q = -2\pi r n B \dot{x}$, $Q_x = 2\pi r n B \dot{q}$

Trả lời:

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx - 2\pi r n B \dot{q} = m\xi_0 \omega^2 \sin \omega t;$$

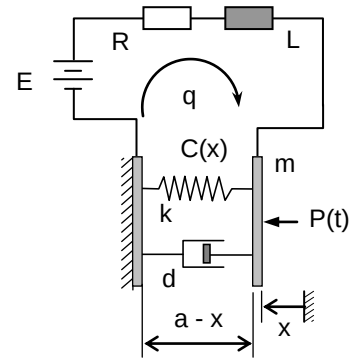
$$L\ddot{q} + R\dot{q} + 2\pi r n B \dot{x} = 0$$



Hình bài 7-36

Bài 47.

5-37. Sơ đồ của một máy micro dùng làm tụ điện được biểu diễn như hình vẽ, nó là một mạch nối tiếp gồm nguồn điện với sức điện động E , cuộn tự cảm với hệ số L , điện trở ôhm R và tụ điện có điện dung C (E , L và R là những hằng số). Giữa hai tấm của tụ điện ta mắc lò xo có độ cứng k và nhót d (không dẫn điện), để có thể thay đổi điện dung C của tụ điện, khối lượng tấm động của tụ điện là m ; gọi C_0 là điện dung của tụ điện lúc hệ cân bằng, khi đó khoảng cách giữa hai tấm tụ điện là a và điện lượng của mỗi tấm đó là q_0 . Tác dụng lên tấm động của tụ điện lực kích động $P(t)$. Lập phương trình vi phân chuyển động của hệ cơ điện ấy.



Hình bài 7-37

Chỉ dẫn:

1- Thế năng của tụ điện bằng $\Pi = \frac{1}{2C} q^2$ (C là điện dung của tụ điện, q là

điện lượng trên các tấm của nó, $C(x) = C_0 a / (a - x)$), động năng của

các điện tử chạy trong mạch được tính theo công thức $T = \frac{1}{2} L i^2$ (L là hệ số tự cảm, $i = dq / dt$ cường độ dòng điện trong mạch).

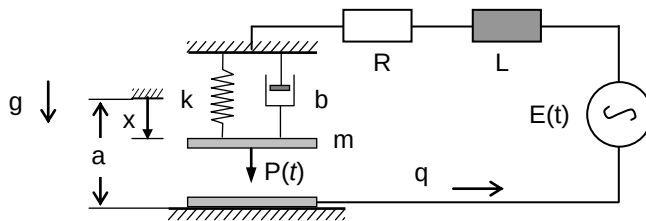
2- Chọn tọa độ suy rộng là độ tăng giảm điện lượng q và độ lệch x của khối tâm đối với vị trí cân bằng. Khi đó điện lượng toàn phần sẽ là $q_0 + q$, còn độ lệch toàn phần $x_0 + x$; ở đó q_0 là điện lượng của tụ điện, còn x_0 là độ lệch của lò xo của vị trí trung hòa đối với vị trí cân bằng.

Trả lời:

$$m\ddot{x} + cx - \frac{E}{a} q - \frac{q^2}{2C_0 a} = P(t), \quad L\ddot{q} + R\dot{q} - \frac{E}{a} x + \frac{q}{C_0} - \frac{qx}{aC_0} = 0$$

Bài 48.

7-38. Sơ đồ cơ điện của một hệ được cho như trên hình. Chiều dài của lò xo lúc không biến dạng bằng l , độ cứng của nó bằng k , khối lượng của tấm động bằng m . Khi lò xo không bị biến dạng khoảng cách giữa tấm động và cố định của tụ bằng a , còn điện dung của nó bằng C_1 . Thành lập phương trình chuyển động của hệ theo các tọa độ suy rộng x và q .



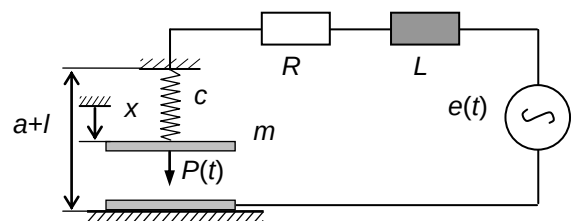
Hình bài 7-38

Trả lời:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx - \frac{q}{aC_1} = mg + P(t), \quad L\ddot{q} + \frac{q}{C_0} - \frac{q}{aC_1}(a - x) + R\dot{q} = e(t).$$

Bài 49.

Bài 5-23 (sửa đổi). Thành lập phương trình vi phân chuyển động cho hệ cơ điện được biểu diễn như trên hình vẽ. Chiều dài của lò xo lúc chưa biến dạng là l , độ cứng lò xo là c . Tụ điện có một tấm cố định và một tấm di động, khối lượng tấm di động là m . Khi lò xo chưa biến dạng, khoảng cách giữa hai tấm là a , còn điện dung của nó là C_1 .



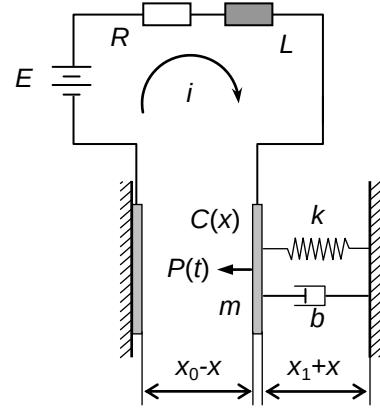
Lưu ý:

- Lực từ tác dụng giữa hai tấm của tụ khi có chứa điện tích (bỏ qua lực này)
- điện áp rơi trên hai cực của tụ điện

Bài 50.

Bài (xem page 74, Linear control system analysis and design with malab. by D'Azzo et.al.)

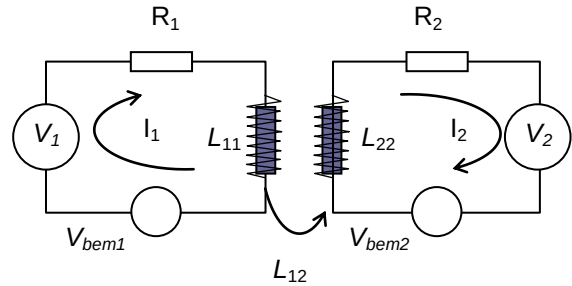
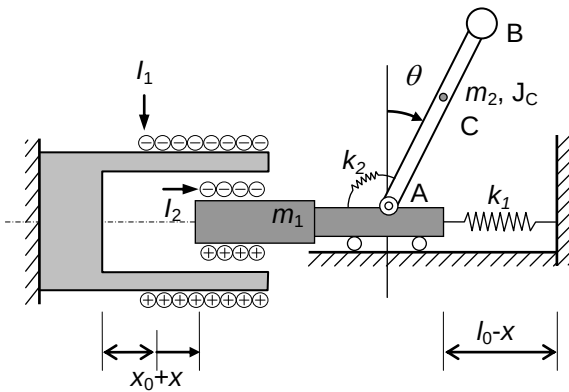
Một máy nói micro (microphone) dùng tụ điện có sơ đồ như trên hình vẽ. Tấm di động của tụ điện có khối lượng m được giữ nhờ một lò xo có độ cứng k và cản nhớt hệ số b , còn tấm kia được giữ cố định. Áp suất âm tác dụng lên tấm được thể hiện bằng lực $P(t)$. Hãy lập phương trình vi phân chuyển động cho hệ.



Bài 51. (see in Francis C. Moon, page 416)

Để làm ổn định con lắc ngược, người ta dùng động cơ tĩnh điện điều khiển bởi điện áp V_1 . Động cơ này tạo ra lực điện từ làm cuộn dây 2 cùng với lõi sắt chuyển động ngang. Sơ đồ hệ cơ điện được cho như trên hình. Các thông số cơ bao gồm: khối lượng xe cùng lõi sắt m_1 , con lắc có khối lượng m_2 , khối tâm tại C_2 , $l = AC$, mômen quán tính khối đối với trục qua khối tâm J_C , độ cứng lò xo kéo nén k_1 và lò xo xoắn là k_2 . Ở trạng thái cân bằng $x = 0, \theta = 0$ các lò xo không bị biến dạng. Các thông số điện bao gồm: hệ số tự cảm và điện trở của các cuộn dây L_{11}, R_1, L_{22}, R_2 , hệ số tự cảm $L_{12}(x)$ thể hiện sự tương tác giữa 2 cuộn dây.

HD. Động năng điện tính theo công thức: $T^e = \frac{1}{2} (L_1 I_1^2 + 2L_{12}(x) I_1 I_2 + L_2 I_2^2)$



Sơ đồ mạch điện của hai phần của động cơ tĩnh điện

1. Thiết lập phương trình vi phân chuyển động cho hệ với các tọa độ suy rộng: $x, \theta, I_1 = \dot{q}_1, I_2 = \dot{q}_2$; các biến đầu vào là $V_1(t), V_2(t)$.

2. Xét trường hợp $I_2 = \dot{q}_2 = I_{2,0} = const$, $L_{12}(x) = L_0 - \lambda x$.

a) Đưa ra phương trình vi phân chuyển động trong trường hợp này.

b) Tuyến tính hóa phương trình vi phân chuyển động quanh vị trí cân bằng $x = 0, \theta = 0$,

$I_1 = \dot{q}_1 = 0$, để nhận được phương trình trạng thái dạng:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u, \quad \mathbf{x} = [x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}, I_1]^T, u = V_1$$

Sau đó khảo sát ổn định của vị trí cân bằng khi chưa có điều khiển, khảo sát tính điều khiển được của hệ.

c) Thiết kế bộ điều khiển LQR để ổn định hóa vị trí cân bằng, với

$$V_1 = -(K_1 x + K_2 \theta + K_3 \dot{x} + K_4 \dot{\theta} + K_5 I_1)$$

3. Xét trường hợp $I_2 = \dot{q}_2 = I_{2,0} = const$, $L_{12}(x) = L_0 - \lambda x$ và bỏ qua sự biến thiên của dòng điện

$$L_{11} \dot{I}_1 \approx 0,$$

a) Đưa ra phương trình vi phân chuyển động trong trường hợp này.

b) Tuyến tính hóa phương trình vi phân chuyển động quanh vị trí cân bằng $x = 0, \theta = 0$, để nhận được phương trình trạng thái dạng:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}, \quad \mathbf{x} = [x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}]^T, u = V_1$$

Sau đó khảo sát ổn định của vị trí cân bằng khi chưa có điều khiển, khảo sát tính điều khiển được của hệ.

c) Thiết kế bộ điều khiển LQR để ổn định hóa vị trí cân bằng, với

$$V_1 = -(K_1x + K_2\theta + K_3\dot{x} + K_4\dot{\theta})$$

Bài 52.

Cho hệ động lực tuyến tính

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}, \quad \mathbf{x} = [\mathbf{q}^T, \dot{\mathbf{q}}^T]^T$$

Khảo sát sự ổn định của điểm cân bằng $\mathbf{x} = 0$, khi hệ không có điều khiển.

Giả sử hệ được điều khiển phản hồi $\mathbf{u} = -\mathbf{Kx}$, ma trận $\mathbf{K}$ sẽ được xác định thế nào để hệ đóng kín ổn định.

Bài 53.

Cho hệ dao động tuyến tính n bậc tự do với phương trình vi phân:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{Kq} = \mathbf{f}(t), \quad \mathbf{q} \in R^n$$

Sử dụng Matlab, giải bài toán tần số dao động riêng và dạng dao động riêng không cản?

Hạ bậc đưa về phương trình vi phân cấp 1, với $\mathbf{x} = [\mathbf{q}^T, \dot{\mathbf{q}}^T]^T$.

Bài 54.

Nêu sự tương đương giữa các phần tử cơ-điện, khi đầu vào hệ cơ là lực và đầu vào hệ điện là điện áp.

Nêu các bước khi thiết lập mô hình toán học cho hệ cơ điện.

Bài 55.

Cho hệ động lực $J_o\ddot{\varphi} + b\dot{\varphi} + k\sin\varphi = 0$, $J_o, b, k > 0$. Đưa ra phương trình tuyến tính hóa quanh điểm

cân bằng $\varphi = \pi, \dot{\varphi} = 0$, sau đó viết phương trình vi phân chuyển động ở dạng: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax}$, với $\mathbf{x} = [\varphi, \dot{\varphi}]^T$.

Dựa vào mô hình tuyến tính hóa khảo sát sự ổn định của điểm cân bằng đó.

Bài 56.

Khái niệm về hàm xác định dương, hàm xác định âm?

Nêu cấu trúc của định lý Lyapunov về ổn định của điểm cân bằng của hệ động lực?

Bài 57.

Cho hệ động lực $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$, $m, c, k > 0$. Hãy chọn hàm Lyapunov và chỉ ra tính ổn định của điểm cân bằng sau $x = 0, \dot{x} = 0$

Bài 58.

Hãy hạ bậc ptvp cấp hai sau về hệ ptvp cấp 1.

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{Bu}, \quad \mathbf{q} \in R^n$$

Nêu phương pháp xác định vị trí cân bằng của hệ trên;

Thực hiện tuyến tính hoá hệ quanh điểm cân bằng, sau đó đưa hệ về dạng

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}, \quad \mathbf{x} = [\mathbf{q}^T, \dot{\mathbf{q}}^T]^T$$

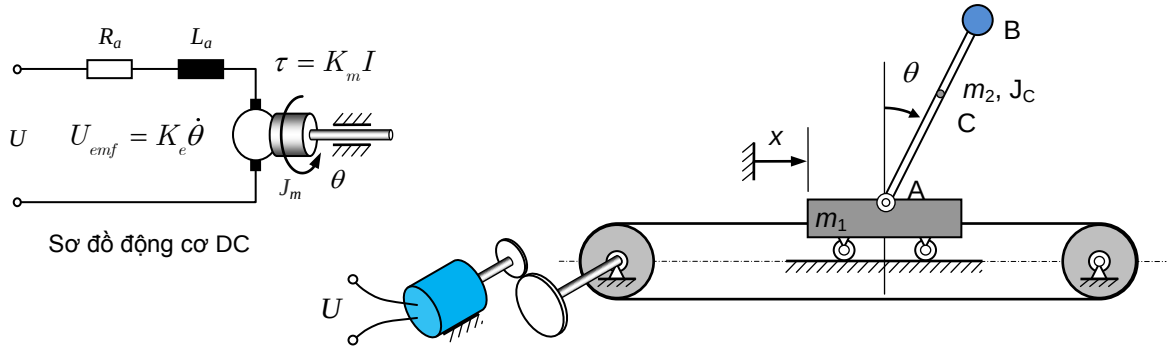
Bài 59.

Nêu khái niệm về hệ động lực ô-tô-nôm và phi ô-tô-nôm? Thế nào là điểm cân bằng của hệ động lực?

Minh hoạ khái niệm ổn định của điểm cân bằng của một hệ động lực theo nghĩa Lyapunov? Phân biệt ổn định, ổn định tiệm cận và ổn định mũ?

Bài 60. (Ổn định hóa con lắc ngược đơn)

Mô hình thí nghiệm ổn định hóa con lắc ngược cho trên hình vẽ. Hệ gồm động cơ DC, hộp giảm tốc, bộ truyền đai, xe chạy và con lắc. Động cơ DC với các thông số: hệ số tự cảm, điện trở, hằng số mômen, hằng số phản sức điện động, và mômen quán tính của rô-tơ tương ứng là: L_a, R_a, K_m, K_e, J_m . Hộp giảm tốc một cấp với tỷ số truyền $r = r_2 / r_1$, mômen quán tính các bánh răng tương ứng là J_1, J_2 . Bộ truyền đai gồm hai bánh đai như nhau (mỗi bánh đai được coi như đĩa đồng chất có khối lượng và bán kính là m_p, r_p), dây đai có khối lượng tổng cộng là m_d (coi như không dẫn, không trượt đối với bánh đai). Xe chạy có khối lượng m_1 , và con lắc có khối lượng m_2 , khối tâm tại C, $l_2 = AC$, mômen quán tính khối đối với trục qua C là J_C . Bỏ qua ma sát.



1. Thiết lập phương trình vi phân chuyển động cho hệ với các tọa độ suy rộng: $x, \theta, I_a = \dot{q}_1$; biến đầu vào là điện áp đặt lên động cơ $U(t)$.

2. Xét trường hợp bỏ qua sự biến thiên của dòng điện $L_a \dot{I}_a \approx 0$,

- Đưa ra phương trình vi phân chuyển động trong trường hợp này.
- Tuyến tính hóa phương trình vi phân chuyển động quanh vị trí cân bằng $\theta = 0$ để nhận được phương trình trạng thái dạng:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u, \quad \mathbf{x} = [x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}]^T, u = U$$

Sau đó khảo sát ổn định của vị trí cân bằng khi chưa có điều khiển, khảo sát tính điều khiển được của hệ.

- Thiết kế bộ điều khiển phản hồi trạng thái $U = -\mathbf{K}\mathbf{x}$, để hệ kín nhận các điểm cực cho trước là $p_1 = -1, p_2 = -2, p_{3,4} = -1 \pm j$.

Mô phỏng đáp ứng của hệ với bộ điều khiển vừa nhận được.

- Thiết kế bộ điều khiển LQR để ổn định hóa vị trí cân bằng, (tự chọn các ma trận $\mathbf{Q}$ và $\mathbf{R}$)

$$U = -\mathbf{K}\mathbf{x} = -(K_1 x + K_2 \theta + K_3 \dot{x} + K_4 \dot{\theta})$$

Mô phỏng đáp ứng của hệ với bộ điều khiển vừa nhận được.

Sử dụng bộ số liệu sau:

$$L_a = 10^{-4} \text{H}, R_a = 1\Omega, K_m = 1 \text{Nm/A}, K_e = 0.2 \text{Volt}/(\text{rad/s}), J_m = 10^{-3} \text{kgm}^2$$

$$r = r_2 / r_1 = 10, J_1 = 10^{-2} \text{kgm}^2, J_2 = 10 \cdot 10^{-2} \text{kgm}^2$$

$$m_p = 0.2 \text{kg}, \quad r_p = 0.02 \text{m}, \quad m_{\text{belt}} = 0.2 \text{kg}$$

$$m_1 = 1 \text{kg}, \quad m_2 = 0.2 \text{kg}, \quad l_2 = 0.5 \text{m}, \quad J_C = 0.1 \text{kgm}^2, \quad g = 9.81 \text{m/s}^2$$