



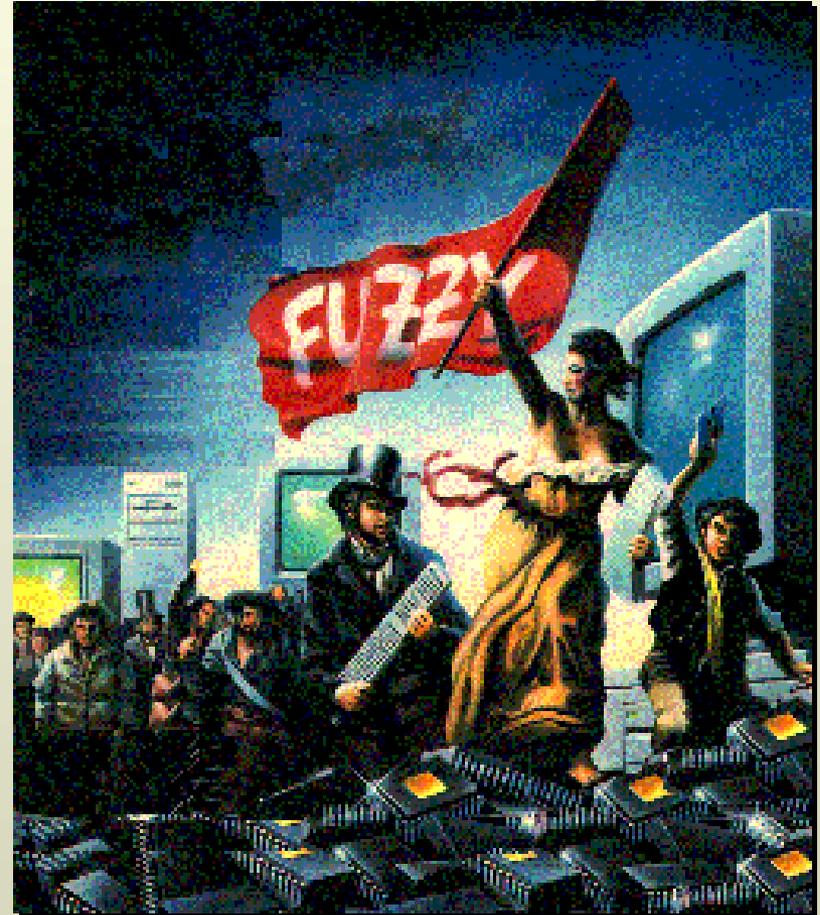
Logic Mờ và Ứng Dụng

Nguyễn Viết Hưng

Tài liệu tham khảo



1. Your Sub Adnan Yazici, Dept. of Computer Engineering, Middle East Technical University, 06531, Ankara/Turkey
2. Cs 460, sessions 22-23
3. Cao Hoàng Tân's Slide
4. Prof. Marian S. Stachowicz, Laboratory for Intelligent Systems ECE Department, University of Minnesota Duluth
5. Dr. Marian S. Stachowicz, Professor and Jack Rowe Chair, Włodzisław Duch, *Dept. of Informatics, Nicholas Copernicus University, Toruń, Poland*, <http://www.phys.uni.torun.pl/~duc/>



FUZZY LOGIC-FUZZY SET

- Thật đơn giản nếu thế giới chỉ có đúng hoặc sai. Giống như trắng, đen là hai màu trong muôn vàn màu sắc; thế giới xung quanh muôn màu và đa dạng...
- **Và câu chuyện của Logic M bắt đầu từ đó...**

Thành ngữ

- “Mathematics that refers to reality is not certain and mathematics that is certain does not refer to reality”

Albert Einstein

- “While the mathematician constructs a theory in terms of ‘perfect’ objects, the experimental observes objects of which the properties demanded by theory are and can, in the very nature of measurement, be only approximately true”

Max Black

- “What makes society turn is science, and the language of science is math, and the structure of math is logic, and the bedrock of logic is Aristotle, and that is what goes out with fuzzy logic”

Bart Kosko



Thế giới xung quanh ta...

Thế giới xung quanh ta được “bao bọc” bởi các khái niệm “mờ” & “không chính xác”.

Cô ấy **rất trẻ**.

Cô ấy **khá cao**.

Anh ta **vô cùng thông minh**.

Ông ấy là một người đàn ông trung niên.

Có thể là anh ta 39 tuổi rưỡi.

Làm thế nào để biết hình dạng thật sự của dấu vân tay???

Không thể & Có thể...

- Không thể dùng logic cổ điển để suy luận và sinh ra tri thức trong môi trường “mờ” như vậy.
- Cần phải có cách thức hiệu quả, linh động hơn để suy luận.
- Fuzzy logic ra đời

Không có khái niệm “không thể mãi mãi”, chỉ có khái niệm “không thể nhất thời”. Nhiệm vụ của chúng ta biến những giấc mơ tưởng chừng như là “không thể” trở thành “có thể”.

Điều gì đang là “không thể” với bạn???

Lịch sử thể hiện những trở ngại của nhân loại...

- Aristotle đặt khái niệm cho logic cổ điển, phát biểu luật bài trung & luật phi mâu thuẫn. Logic cổ điển áp dụng rất thành công trong toán học.
- Plato là người đặt nền tảng cho Fuzzy Logic khi cho rằng còn giá trị thứ ba “khác hơn là đúng, sai”.

Lịch sử thể hiện những trở ngại của nhân loại...

- Vào những năm 1900, Lukasiewicz đề xuất Logic “3 giá trị”, trong đó giá trị thứ ba có thể mô tả như là “có thể”.
- Sau đó, ông đề nghị tiếp logic “4 giá trị”, logic “5 giá trị”.
- Lukasiewicz cũng cảm thấy giữa logic “ba giá trị” và logic “vô hạn giá trị” có rất nhiều điểm tương đồng.

Người biến cái không thể trở thành có thể...

- Năm 1965, Lotfi A.Zadeh đã xuất bản bài báo “Fuzzy set” trong đó mô tả toán học của lý thuyết “Fuzzy set” và “Fuzzy Logic”.
- Zadeh đề nghị định nghĩa tập Mờ bởi một hàm thành viên (membership function) nhận giá trị trong $[0.0,1.0]$.
- Những phép toán mới cho tính toán logic cũng được đề nghị.

Lịch sử, tình trạng và tương lai phát triển của Fuzzy Logic

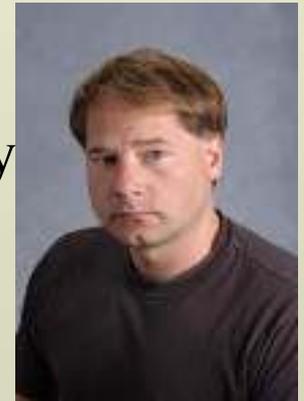


- 1965: Bài báo về Fuzzy Logic của giáo sư Lotfi Zadeh, trường đại học Berkeley “Sets the foundation of the Fuzzy Set Theory”
- 1975: Giới thiệu Fuzzy Logic tại Nhật Bản
- 1980: Kiểm tra theo kinh nghiệm của Fuzzy Logic tại Châu Âu.
- 1985: Ứng dụng ban đầu về Fuzzy Logic tại Nhật.
- 1990: Ứng dụng ban đầu về Fuzzy Logic tại Châu Âu.
- 1995: Ứng dụng ban đầu về Fuzzy Logic tại Mỹ
- 2000: Fuzzy Logic trở thành tiêu chuẩn kỹ thuật và được ứng dụng trong việc phân tích dữ liệu và tín hiệu cảm biến. Ứng dụng của Fuzzy logic trong Kinh tế và tài chính

**Today, Fuzzy Logic Has
Already Become the
Standard Technique for
Multi-Variable Control !**

Fuzzy People

- Founder of Fuzzy Logic
 - Lotfi A. Zadeh
 - Retired Professor, Computer Science, University of California, Berkeley
- Prominent Fuzzy Theorist
 - Bart Kosko
 - Professor, Electrical Engineering, University of Southern California



Fuzzy Applications

- Principal Apps

- control
- consumer products
- industrial systems
- automotive
- decision analysis
- medicine
- geology
- pattern recognition
- robotics

- Emerging Apps

- computational theory of perceptions
- Natural language processing
- financial engineering
- biomedicine
- legal reasoning
- forecasting

Định nghĩa Tập Mờ...

Khái niệm

Characteristic function:

Cho tập $U \neq \emptyset$, $A \subset U$ ta xây dựng hàm $\mu_A(u)$ như sau:

$$\mu_A: U \rightarrow \{0, 1\}$$

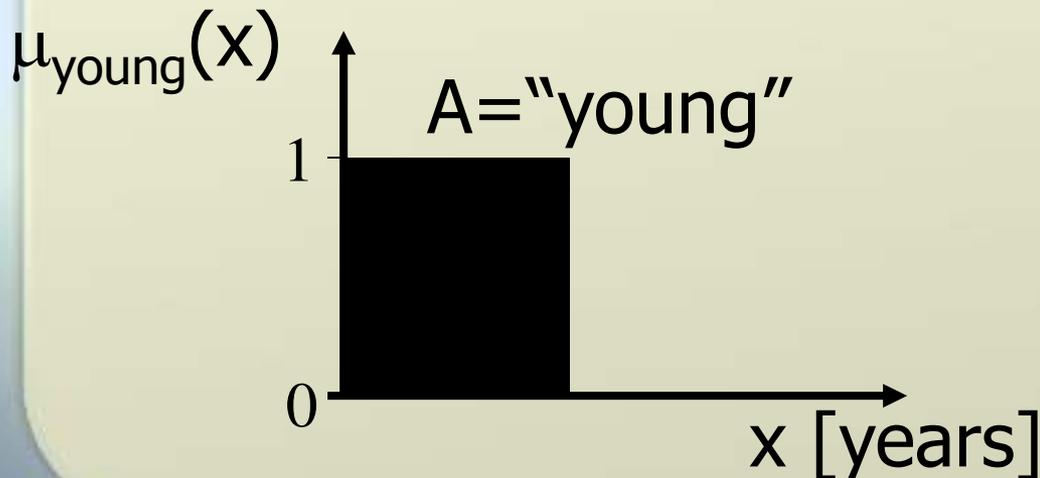
$$\mu_A(u) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } u \in A \\ 0 & \text{nếu } u \notin A \end{cases}$$

Định nghĩa Tập Mờ...

$$\text{young} = \{ x \in P \mid \text{age}(x) \leq 20 \}$$

characteristic function:

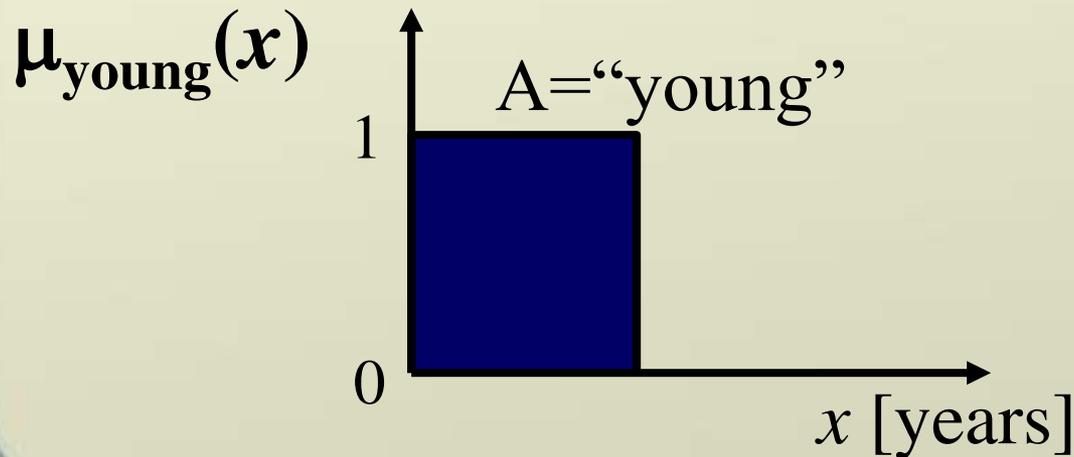
$$\mu_{\text{young}}(x) = \begin{cases} 1 & : \text{age}(x) \leq 20 \\ 0 & : \text{age}(x) > 20 \end{cases}$$



Crisp Sets

$$\text{young} = \{ x \in M \mid \text{age}(x) \leq 20 \}$$

$$\mu_{\text{young}}(x) = \begin{cases} 1 & : \text{age}(x) \leq 20 \\ 0 & : \text{age}(x) > 20 \end{cases}$$



Crisp Logic

- Crisp logic is concerned with absolutes-true or false, there is no in-between.
- Example:

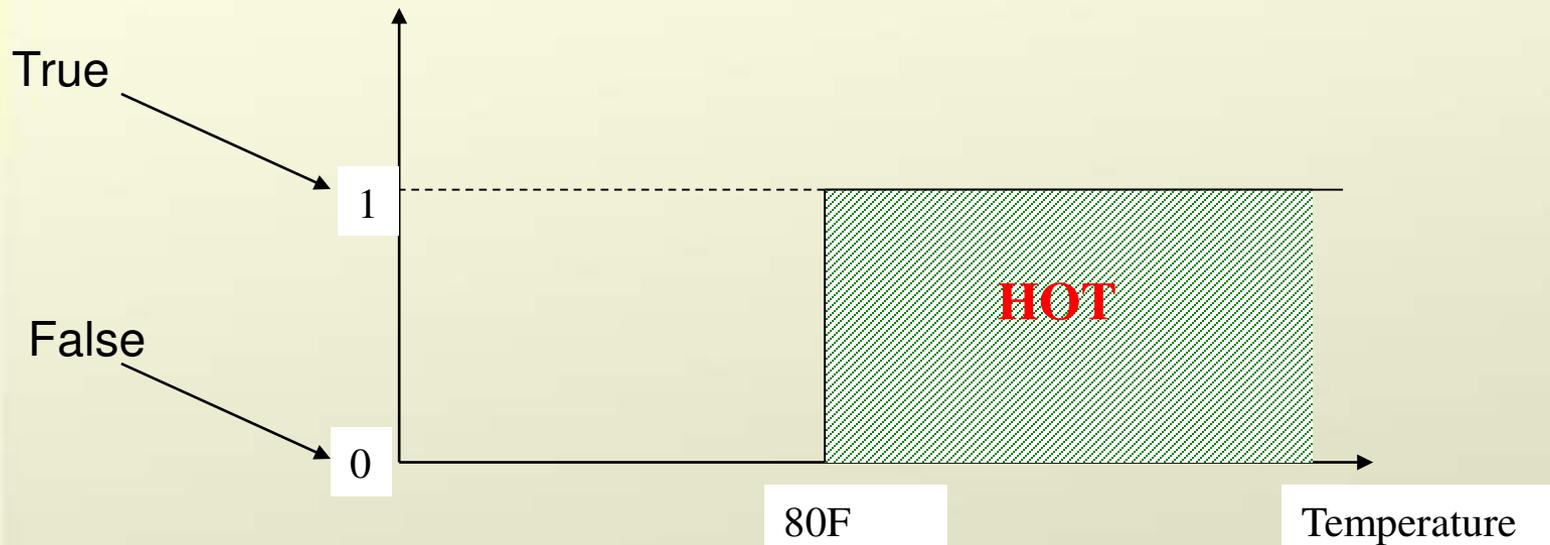
Rule:

If the temperature is higher than 80F, it is hot; otherwise, it is not hot.

Cases:

- Temperature = 100F **Hot**
- Temperature = 80.1F **Hot**
- Temperature = 79.9F **Not hot**
- Temperature = 50F **Not hot**

Membership function of crisp logic



If temperature $\geq 80F$, it is hot (1 or true);

If temperature $< 80F$, it is not hot (0 or false).

Định nghĩa Tập Mờ...

Khái niệm

Membership functions :

Cho tập $U \neq \emptyset$, $A \subset U$.

Ta nói : A là tập mờ trên không gian nền U nếu A được xác định bởi hàm:

$$\mu_A: U \rightarrow [0,1]$$

Trong đó:

- μ_A là hàm liên thuộc (membership function)
- $\mu_A(u)$ là độ liên thuộc của u vào tập mờ A .

Định nghĩa Tập Mờ...

Ghi Chú:

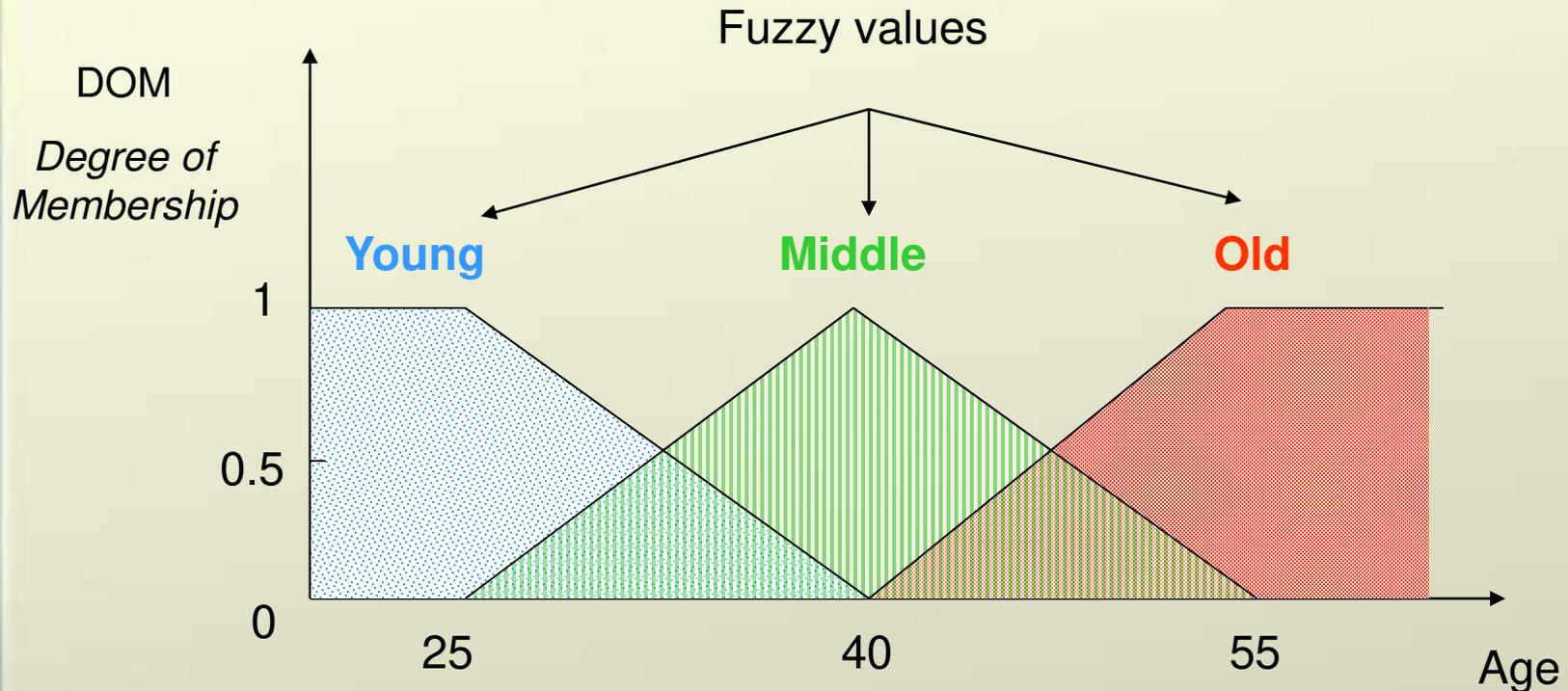
- $0 \leq \mu_A(u) \leq 1$
- Giá trị của $\mu_A(u)$ chỉ ra bậc tư cách thành viên của phần tử x trong tập Mờ A . (Đánh giá mức độ phụ thuộc của phần tử $u \in A$)
- $\mu_A(u)$ càng lớn \rightarrow tư cách thành viên của x trong A càng cao

Example: “Young”

Example:

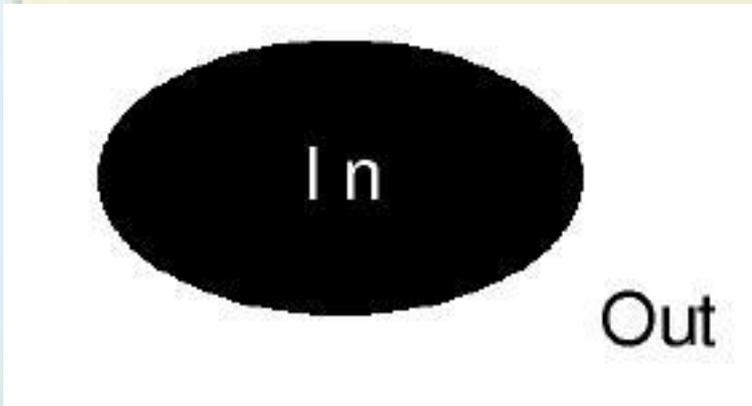
- Ann is 28, 0.8 in set “Young”
- Bob is 35, 0.1 in set “Young”
- Charlie is 23, 1.0 in set “Young”

Membership function of fuzzy logic

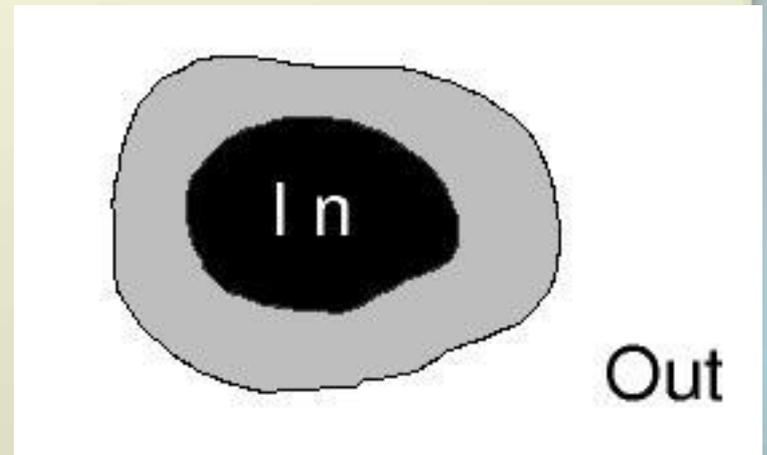


Fuzzy values have associated degrees of membership in the set.

Crisp set vs. Fuzzy set

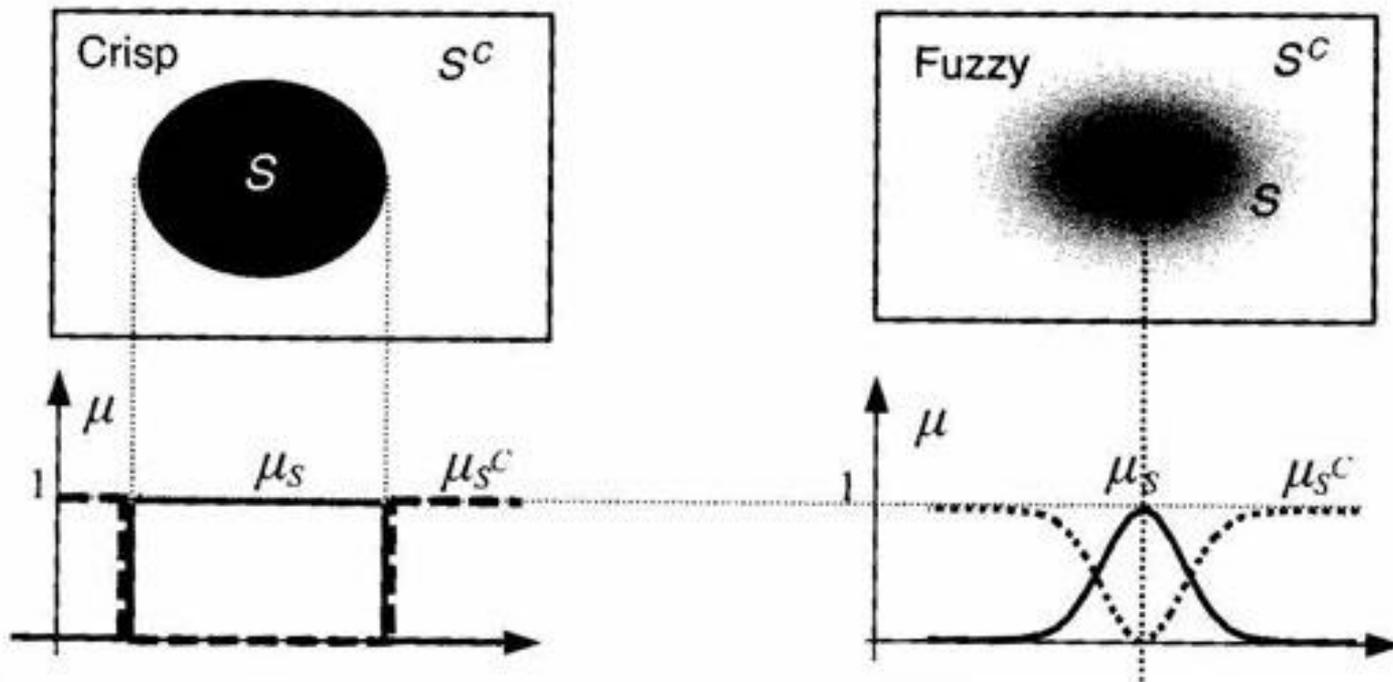


A traditional crisp set



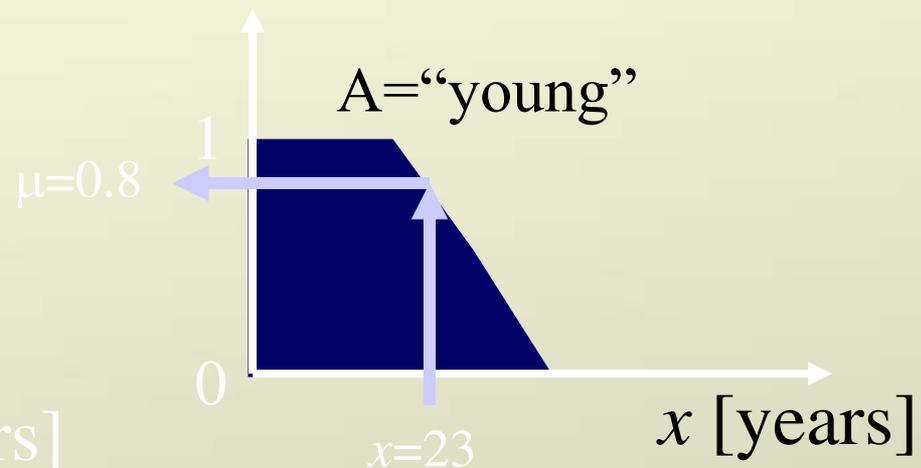
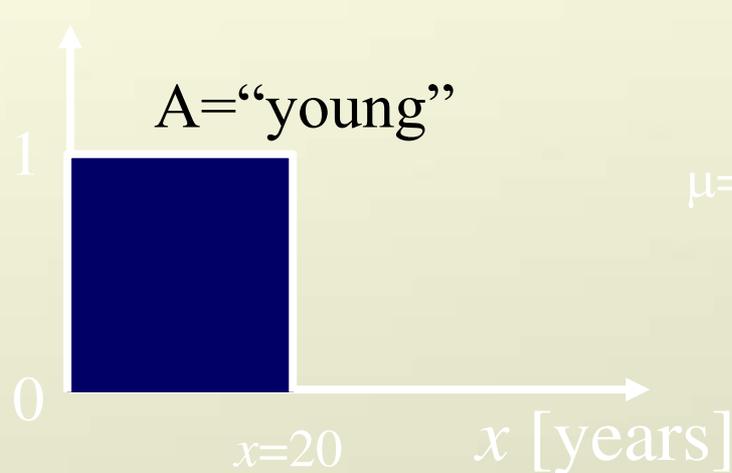
A fuzzy set

Crisp set vs. Fuzzy set



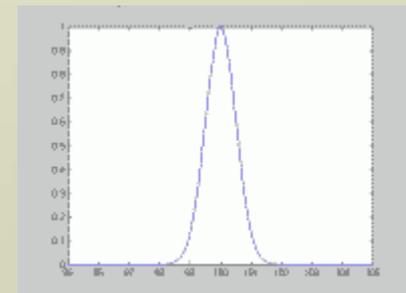
Fuzzy examples

Crisp and fuzzy concept “young men”



“Boiling temperature” has value around 100 degrees (pressure, chemistry).

$$\mu_w(T) = e^{-2(T-100)^2}$$



Định nghĩa Tập Mờ...

Biểu diễn của tập mờ A trên không gian nền U

$$A = \{ (u, \mu(u)) \mid u \in U \}$$

Làm bớt mờ tập Mờ....

Tập nền X : tập hợp các sinh viên của khoa Toán-Tin.

– B: Tập các sinh viên năm thứ 2.

➤ **B là tập con rõ của X.**

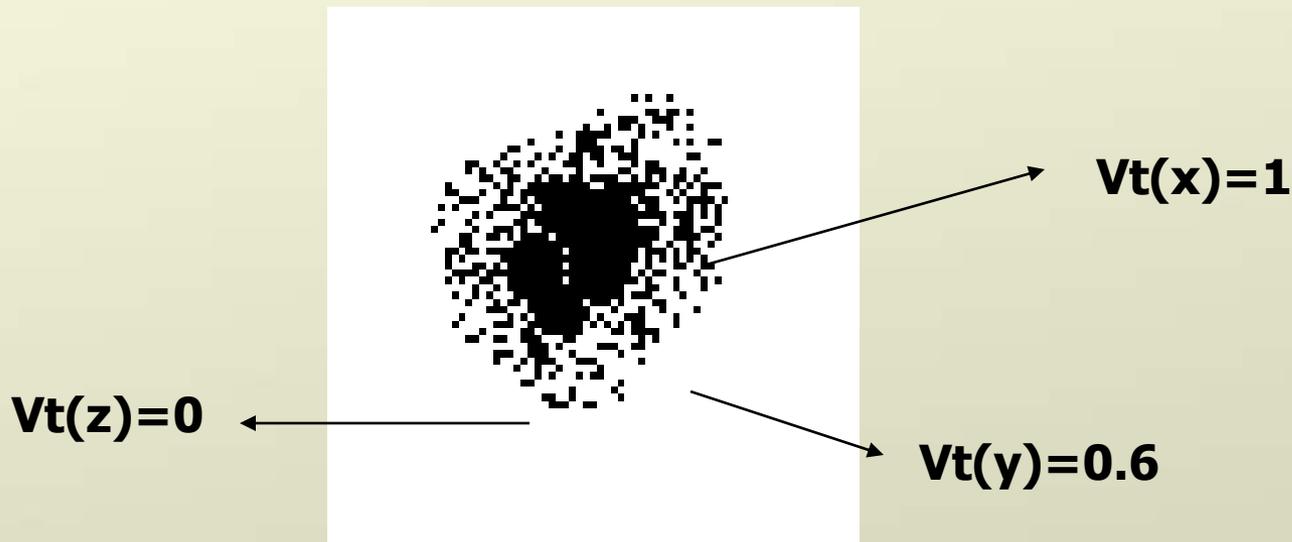
– A: Tập các sinh viên “giỏi Tin” của khoa Toán-Tin.

➤ **A là tập con Mờ của X.**

Tên	Bình	Huy	Anh	Cúc	Mít đặc	Biết tốt
Bậc trong A	0.1	0.3	0.8	0.6	0	1	

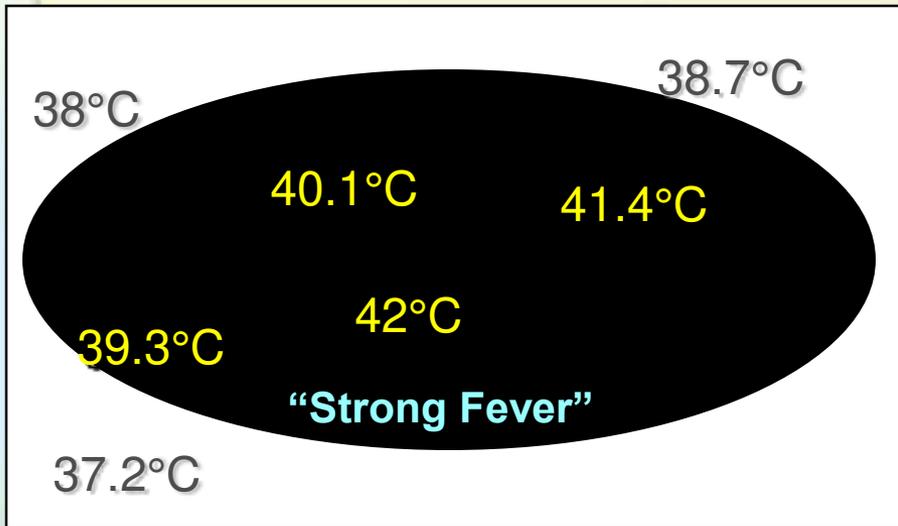
Làm bột mờ tập Mờ....

Dấu vân tay “tội phạm” để lại tại hiện trường cũng là tập Mờ.

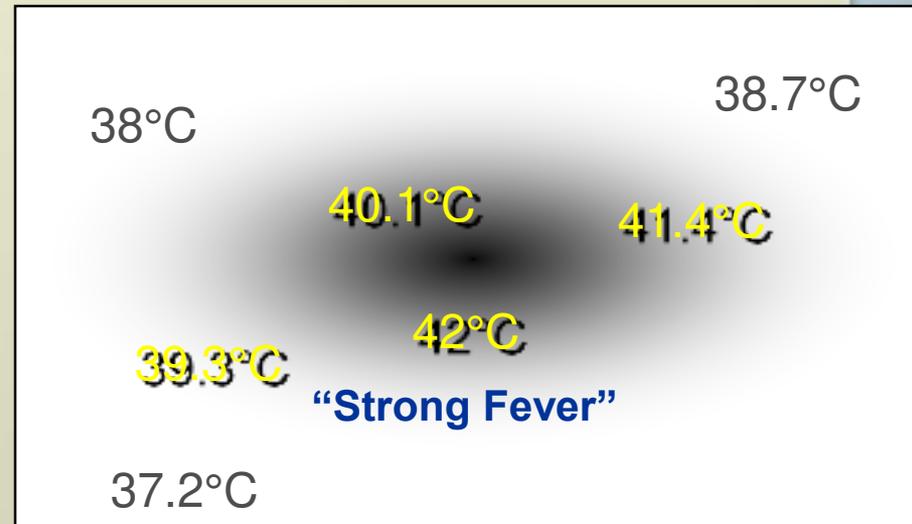


Làm bớt mờ tập Mờ....

Conventional (Boolean) Set Theory:



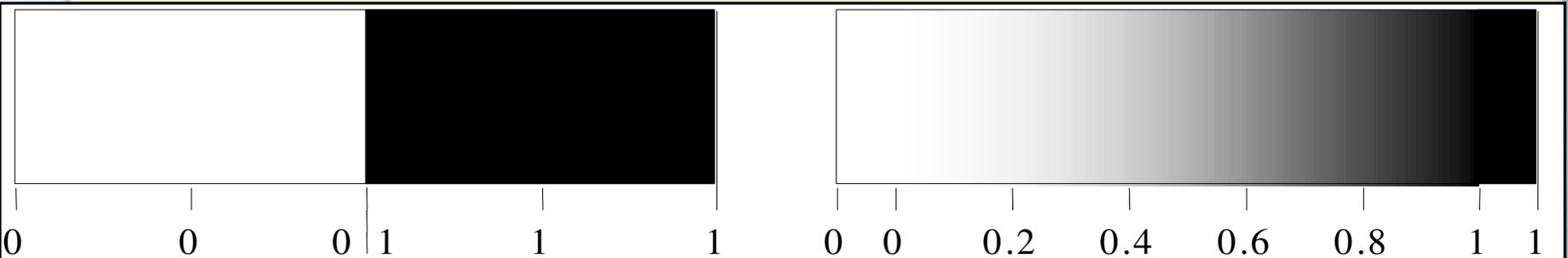
Fuzzy Set Theory:



"More-or-Less" Rather Than "Either-Or" !

Làm bớt mờ tập Mờ....

Khoảng giá trị logic trong Boolean và trong Logic mờ



(a) Boolean Logic.

(b) Multi-valued Logic.

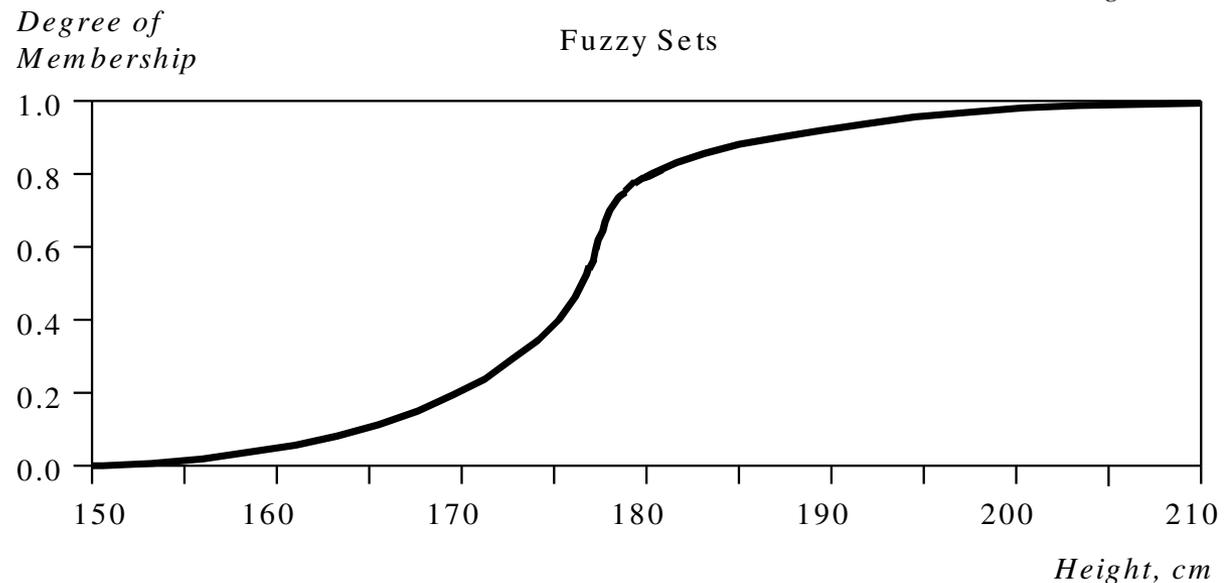
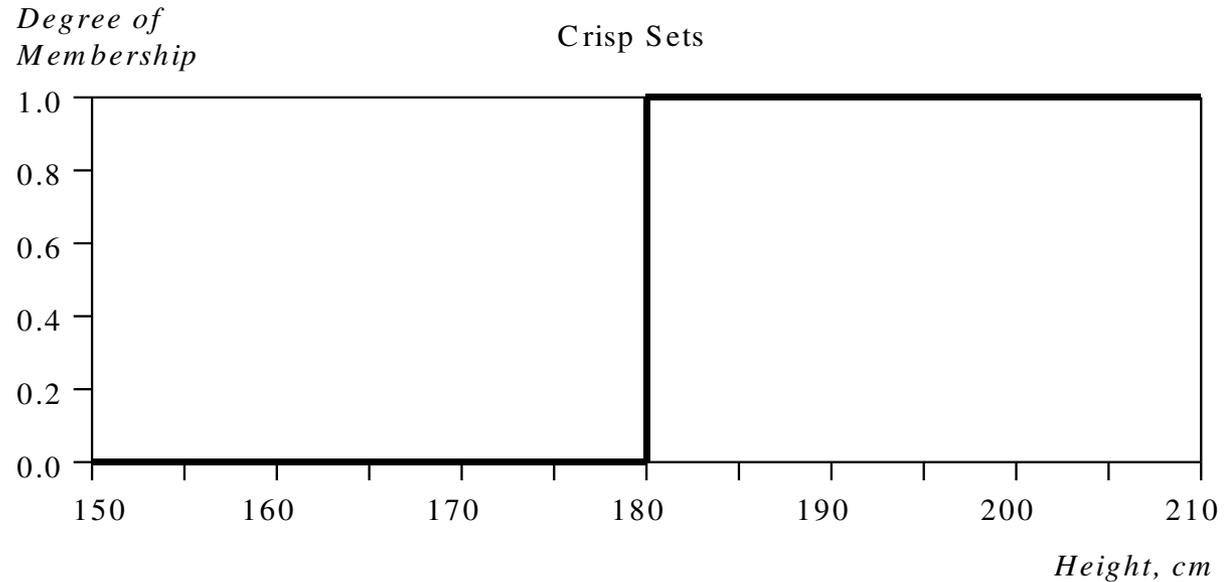
Làm bớt mờ tập Mờ....

The classical example in fuzzy sets is *tall men*. The elements of the fuzzy set “tall men” are all men, but their degrees of membership depend on their height.

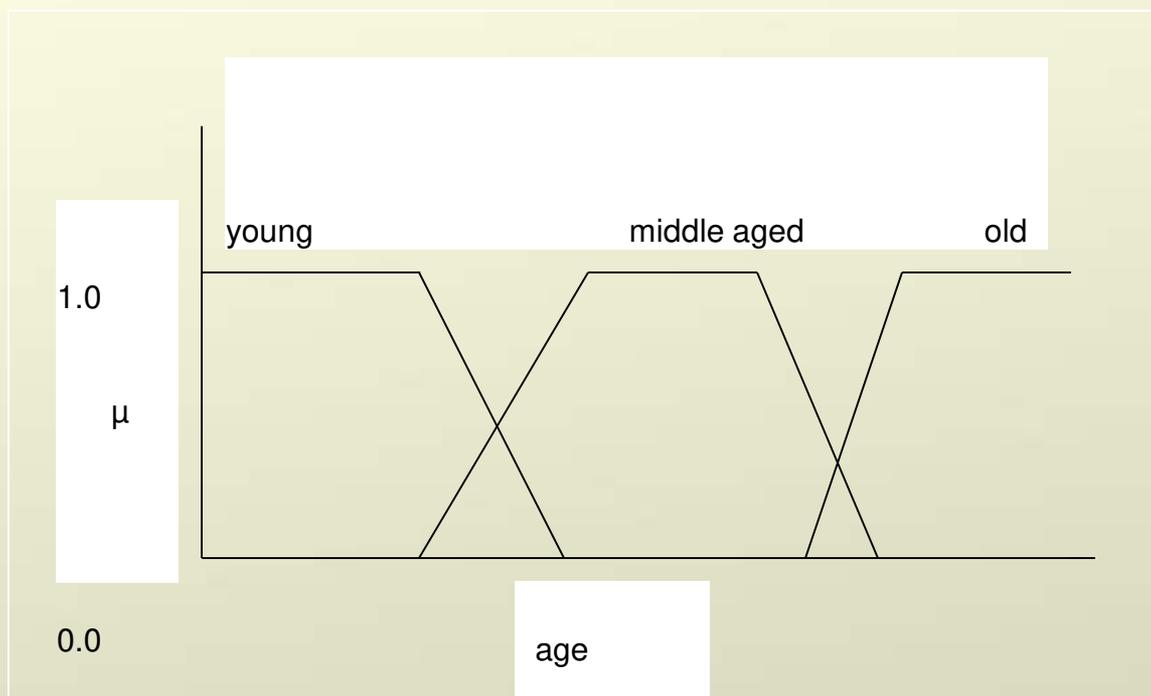
Name	Height, cm	Degree of Membership	
		<i>Crisp</i>	<i>Fuzzy</i>
Chris	208	1	1.00
Mark	205	1	1.00
John	198	1	0.98
Tom	181	1	0.82
David	179	0	0.78
Mike	172	0	0.24
Bob	167	0	0.15
Steven	158	0	0.06
Bill	155	0	0.01
Peter	152	0	0.00

Làm bột mờ tập Mờ....

**Crisp and
fuzzy sets of
“tall men”**



Làm bớt mờ tập Mờ....



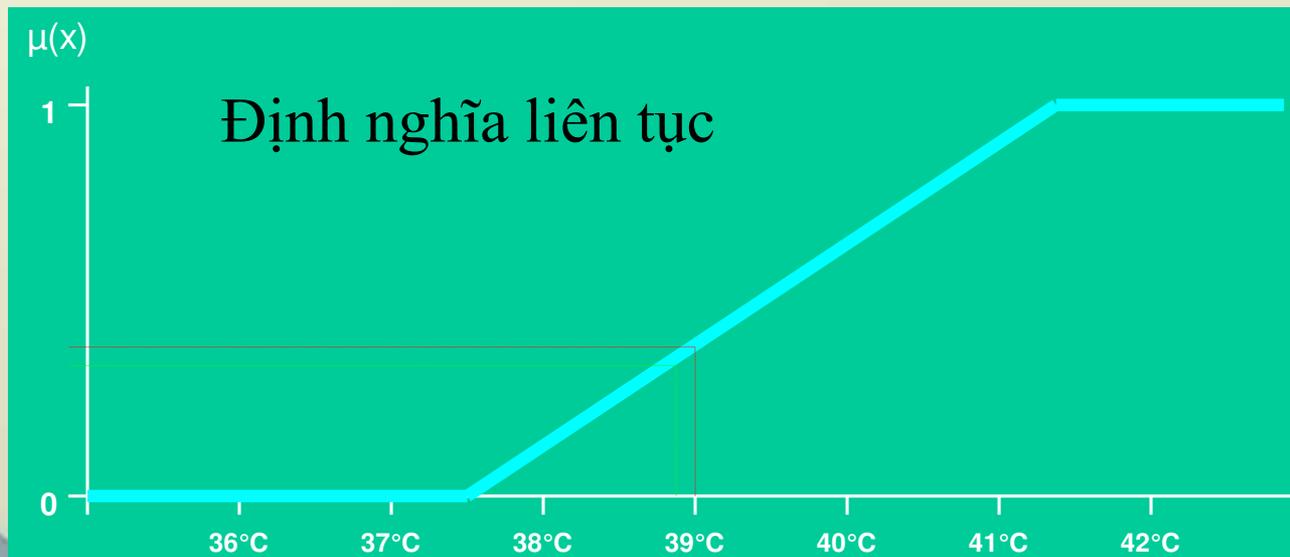
Làm bột mờ tập Mờ....

Định nghĩa rời rạc:

$$\mu_{SF}(35^{\circ}\text{C}) = 0 \quad \mu_{SF}(38^{\circ}\text{C}) = 0.1 \quad \mu_{SF}(41^{\circ}\text{C}) = 0.9$$

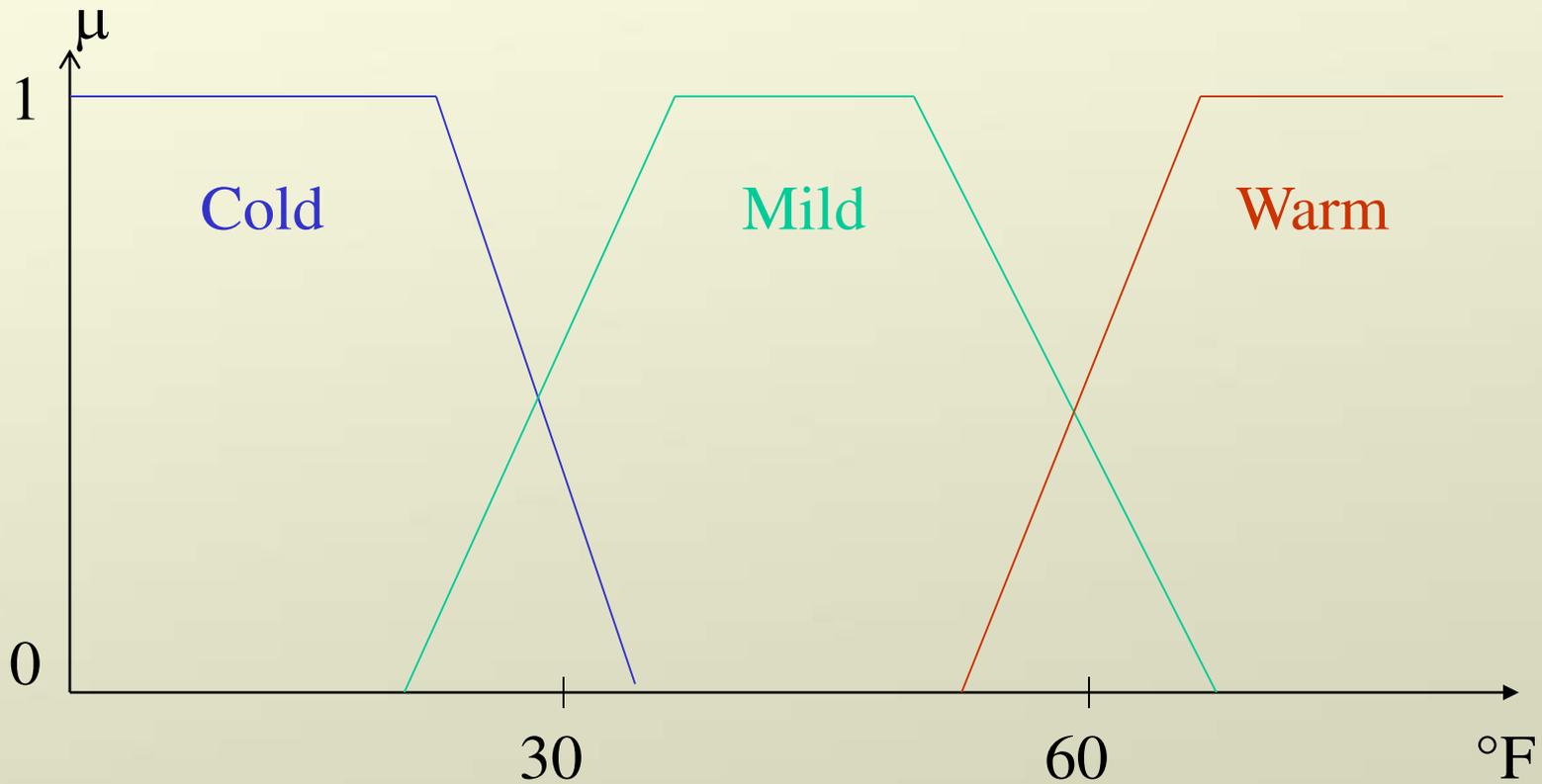
$$\mu_{SF}(36^{\circ}\text{C}) = 0 \quad \mu_{SF}(39^{\circ}\text{C}) = 0.35 \quad \mu_{SF}(42^{\circ}\text{C}) = 1$$

$$\mu_{SF}(37^{\circ}\text{C}) = 0 \quad \mu_{SF}(40^{\circ}\text{C}) = 0.35 \quad \mu_{SF}(43^{\circ}\text{C}) = 1$$



Làm bột mờ tập Mờ....

Membership Grade

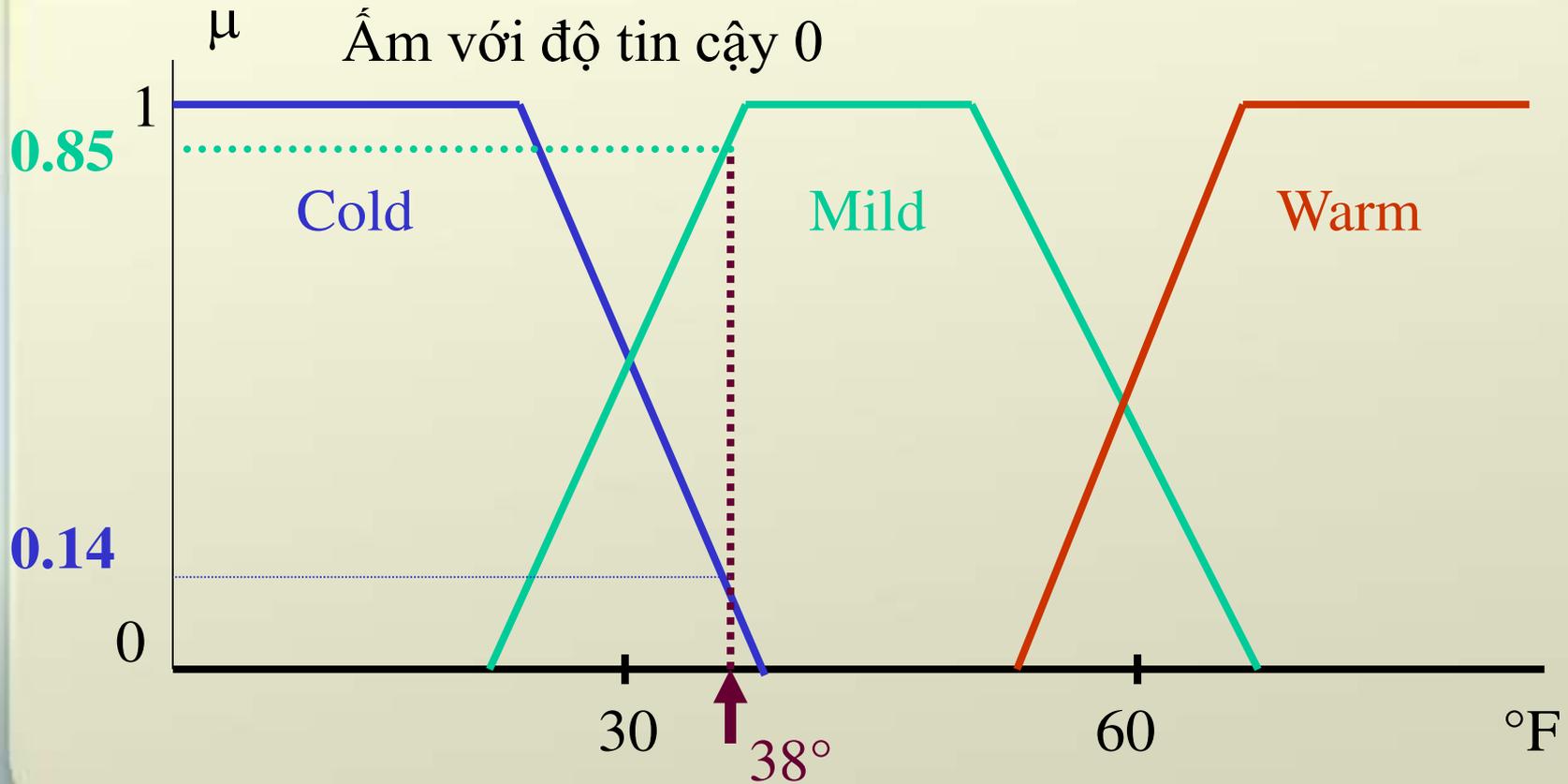


Quan sát ở nhiệt độ 38:

Lạnh với độ tin cậy 0.14

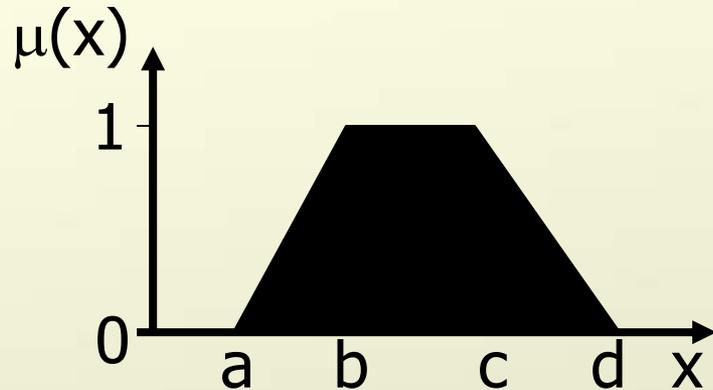
Trung bình với độ tin cậy 0.85

Ấm với độ tin cậy 0

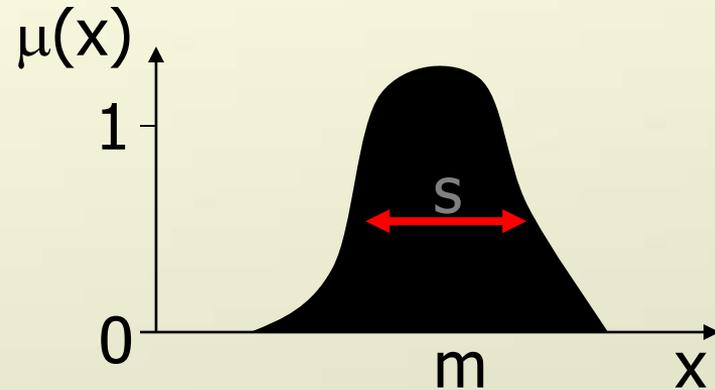


Types of Membership Functions

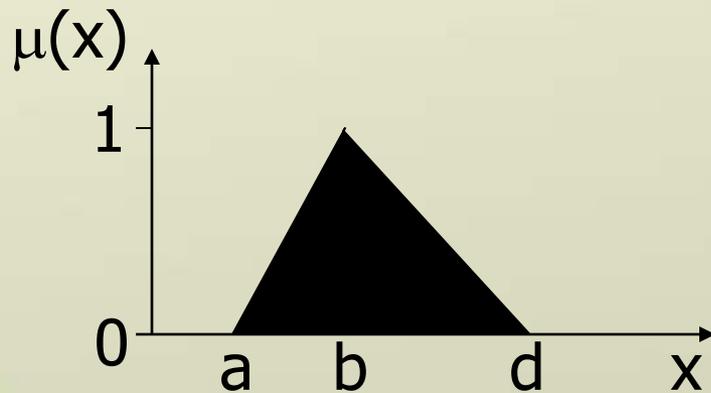
Trapezoid: $\langle a, b, c, d \rangle$



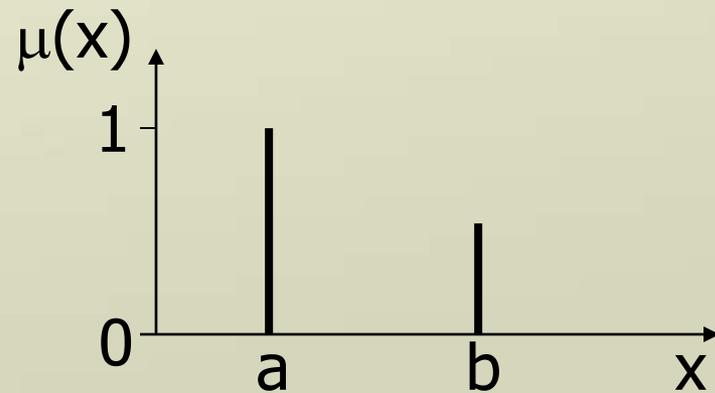
Gaussian: $N(m, s)$



Triangular: $\langle a, b, b, d \rangle$

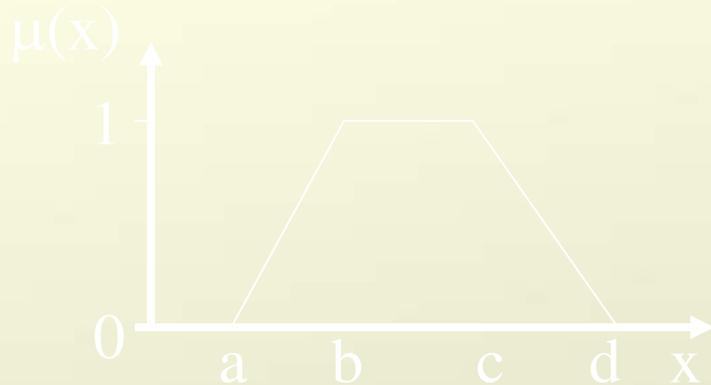


Singleton: $(a, 1)$ and $(b, 0.5)$

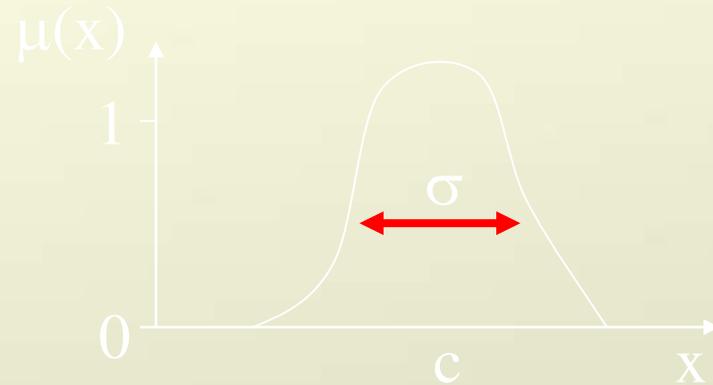


Types of MF

Trapezoid: $\langle a, b, c, d \rangle$



Gaus/Bell: $N(m, s)$

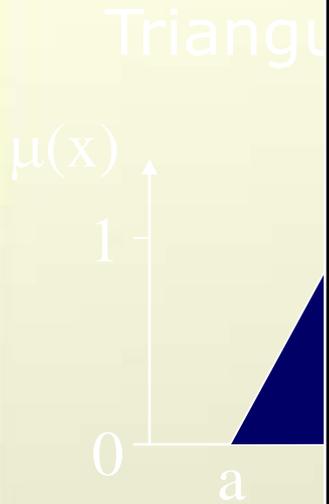


$$\text{Trap}(x; a, b, c, d) = \max \left(\min \left(\frac{x-a}{b-a}, \frac{d-x}{d-c}, 1 \right), 0 \right)$$

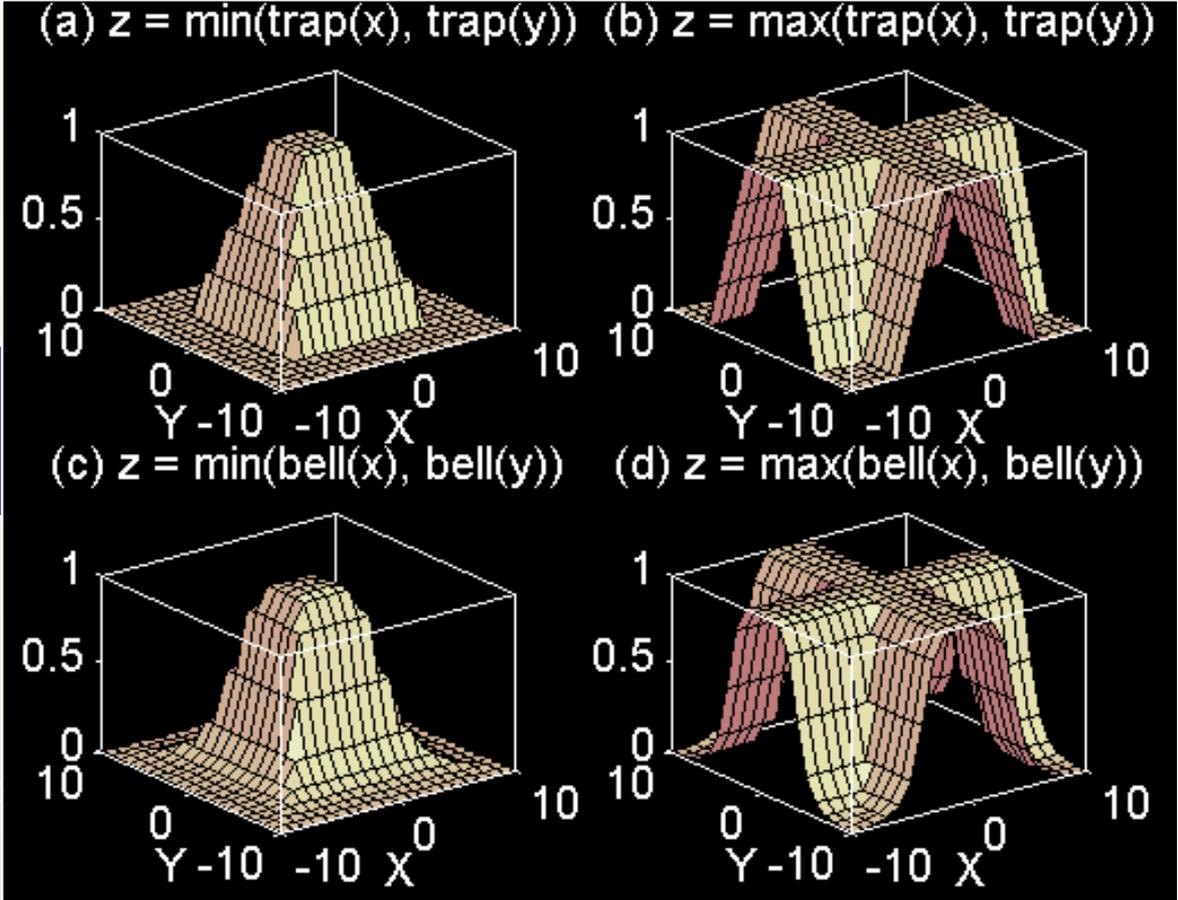
$$G(x; a) = e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

$$B(x; a, b) = \frac{1}{1 + \left| \frac{x-a}{b} \right|^{2b}}$$

MF example



$$T(x; a, b, c)$$



i (b,0.5)

x

Các phương pháp biểu diễn ...

$$F = \mu_1/x_1 + \mu_2/x_2 + \dots \mu_n/x_n$$

- For example:

$$\text{TALL} = \{0/1.0, 0/1.2, 0/1.4, 0.2/1.6, 0.8/1.7, 1.0/1.8\}$$

Một số các biểu diễn khác ...

- **Analog fuzzy sets**

$$A : U \rightarrow [0, 1]$$

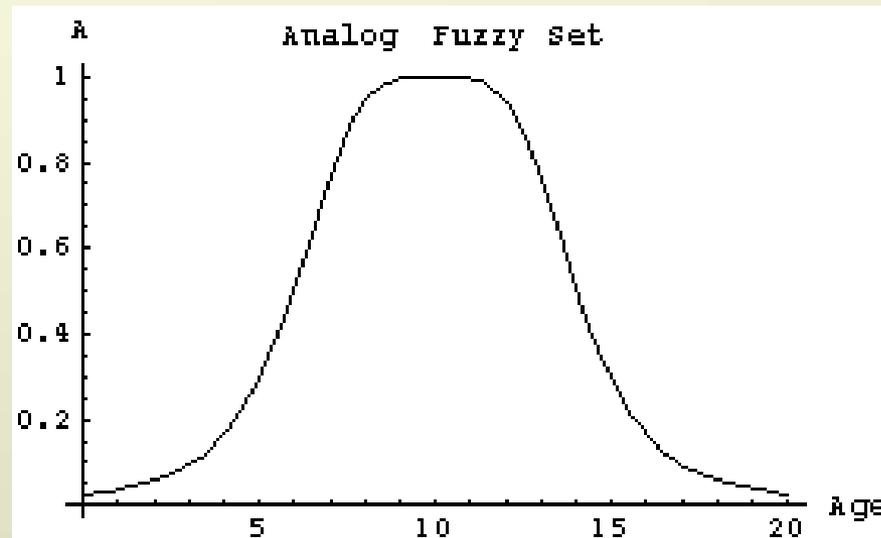
- **Discrete fuzzy sets**

$$A : \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_s\} \rightarrow [0, 1]$$

- **Digital fuzzy sets**

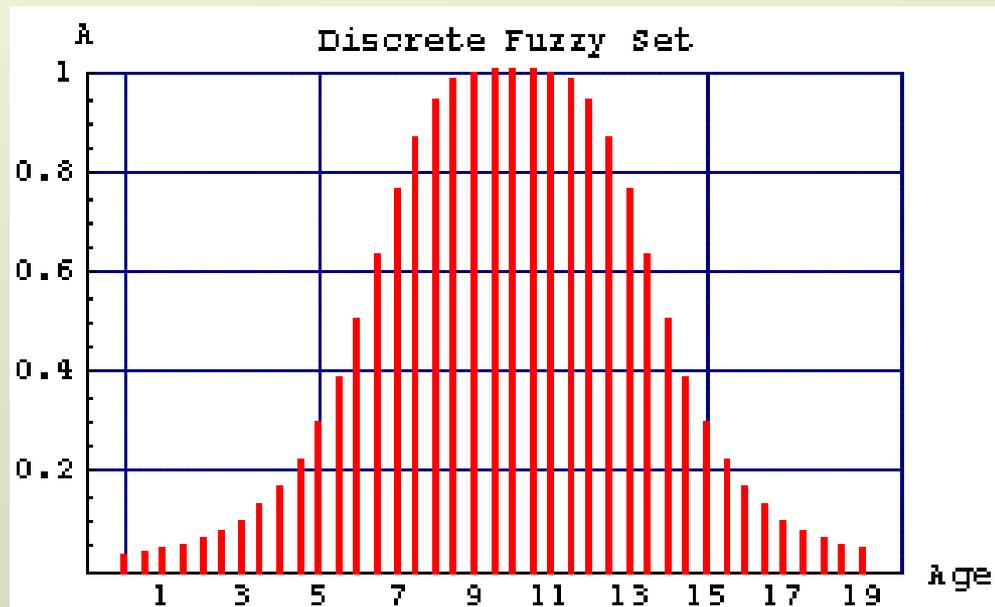
$$A : \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_s\} \rightarrow \{0, 1/n-1, 2/n-1, 3/n-1, \dots, n-2/n-1, 1\}$$

Analog fuzzy sets

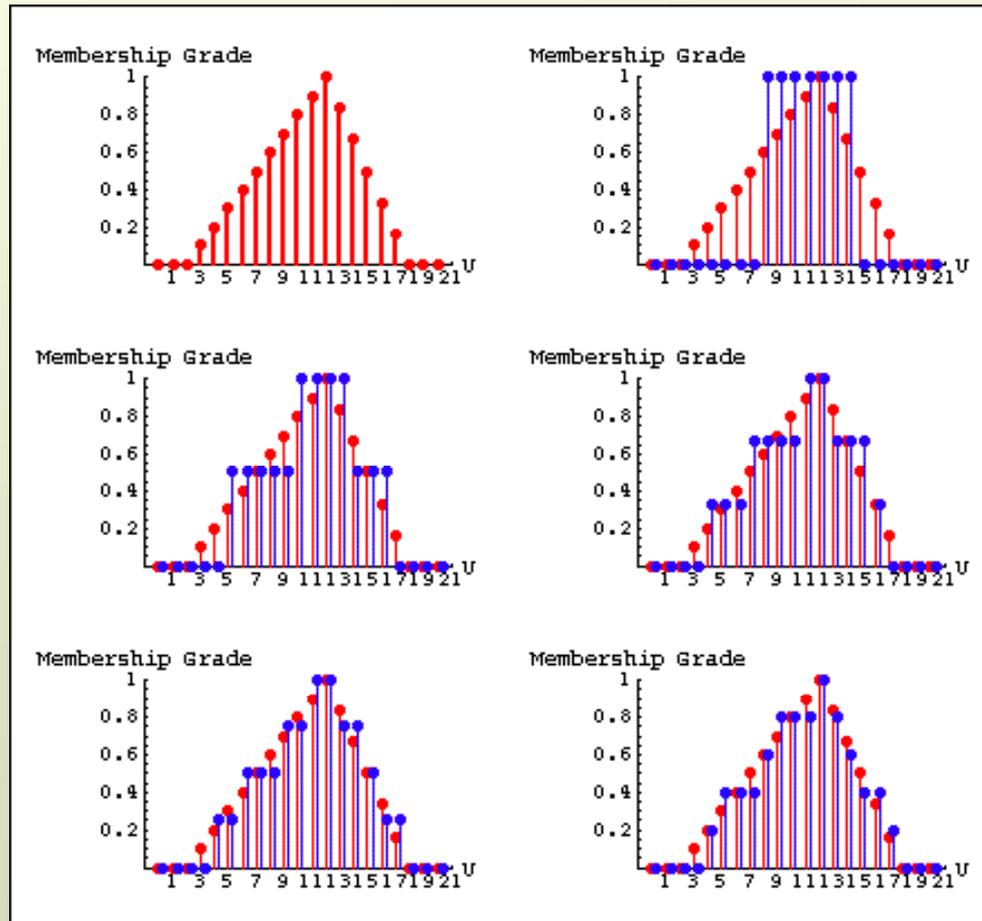


Discrete fuzzy sets

Let $U = \{0, 20, 0.5\}$ then the discrete fuzzy set A has a form :



Digital Fuzzy Sets



Phép toán trên tập mờ

1. Equality: $A = B$

$$\mu_A(u) = \mu_B(u) \quad \text{for all } u \in U$$

2. Complement A'

$$\mu_{A'}(u) = 1 - \mu_A(u) \quad \text{for all } u \in U$$

3. Containment: $A \subseteq B$

$$\mu_A(u) \leq \mu_B(u) \quad \text{for all } u \in U$$

4. Union: $A \cup B$

$$\mu_{A \cup B}(u) = \max(\mu_A(u), \mu_B(u)) \quad \text{for all } u \in U$$

5. Intersection: $A \cap B$

$$\mu_{A \cap B}(u) = \min(\mu_A(u), \mu_B(u)) \quad \text{for all } u \in U$$

Các phép toán trên tập mờ

Định nghĩa: Cho A và B là hai tập mờ trên không gian nền U, có các hàm liên thuộc μ_A, μ_B . Khi đó ta có các phép toán sau:

Stt	Phép toán trên tập mờ	Định nghĩa hàm liên thuộc
1	$A \subseteq B$	$\mu_A(u) \leq \mu_B(u)$
2	$A \cup B$	$\mu_{A \cup B}(u) = \max\{\mu_A(u), \mu_B(u)\}$
3	$A \cap B$	$\mu_{A \cap B}(u) = \min\{\mu_A(u), \mu_B(u)\}$
4	$\neg A$	$\mu_{\neg A} = 1 - \mu_A$
5	$A \oplus B$	$\mu_{A \oplus B} = \mu_A(u) + \mu_B(u) - \mu_A(u)\mu_B(u)$
6	U	$\mu_U(u) = 1$
7	ϕ	$\mu_\phi(u) = 0$

Fuzzy Set Operations

- Fuzzy union (\cup): the union of two fuzzy sets is the maximum (MAX) of each element from two sets.

- E.g.

- $A = \{1.0, 0.20, 0.75\}$

- $B = \{0.2, 0.45, 0.50\}$

$$A \cup B = \{\text{MAX}(1.0, 0.2), \text{MAX}(0.20, 0.45), \text{MAX}(0.75, 0.50)\}$$

$$= \{1.0, 0.45, 0.75\}$$

Fuzzy Set Operations

- Fuzzy intersection (\cap): the intersection of two fuzzy sets is just the MIN of each element from the two sets.

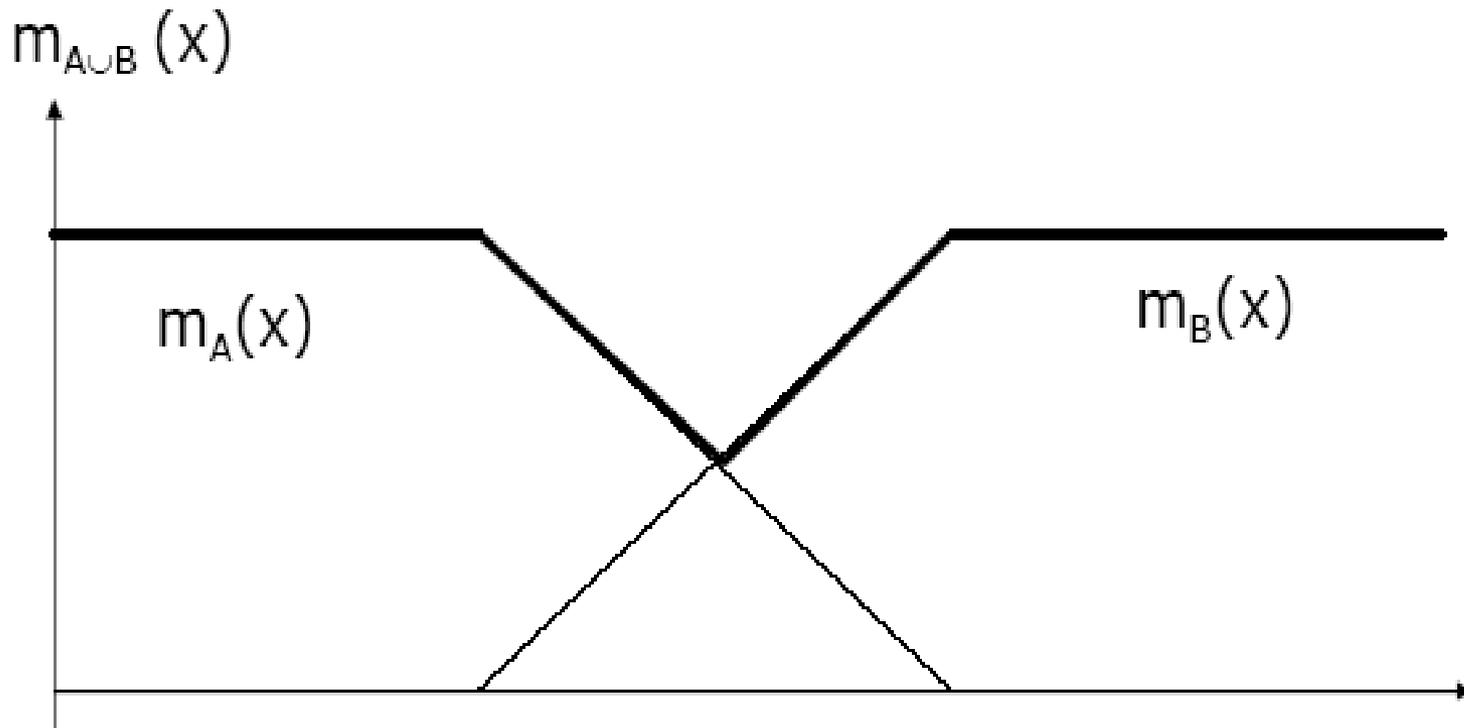
$$\begin{aligned} A \cap B &= \{\text{MIN}(1.0, 0.2), \text{MIN}(0.20, 0.45), \text{MIN}(0.75, 0.50)\} \\ &= \{0.2, 0.20, 0.50\} \end{aligned}$$

Fuzzy Set Operations

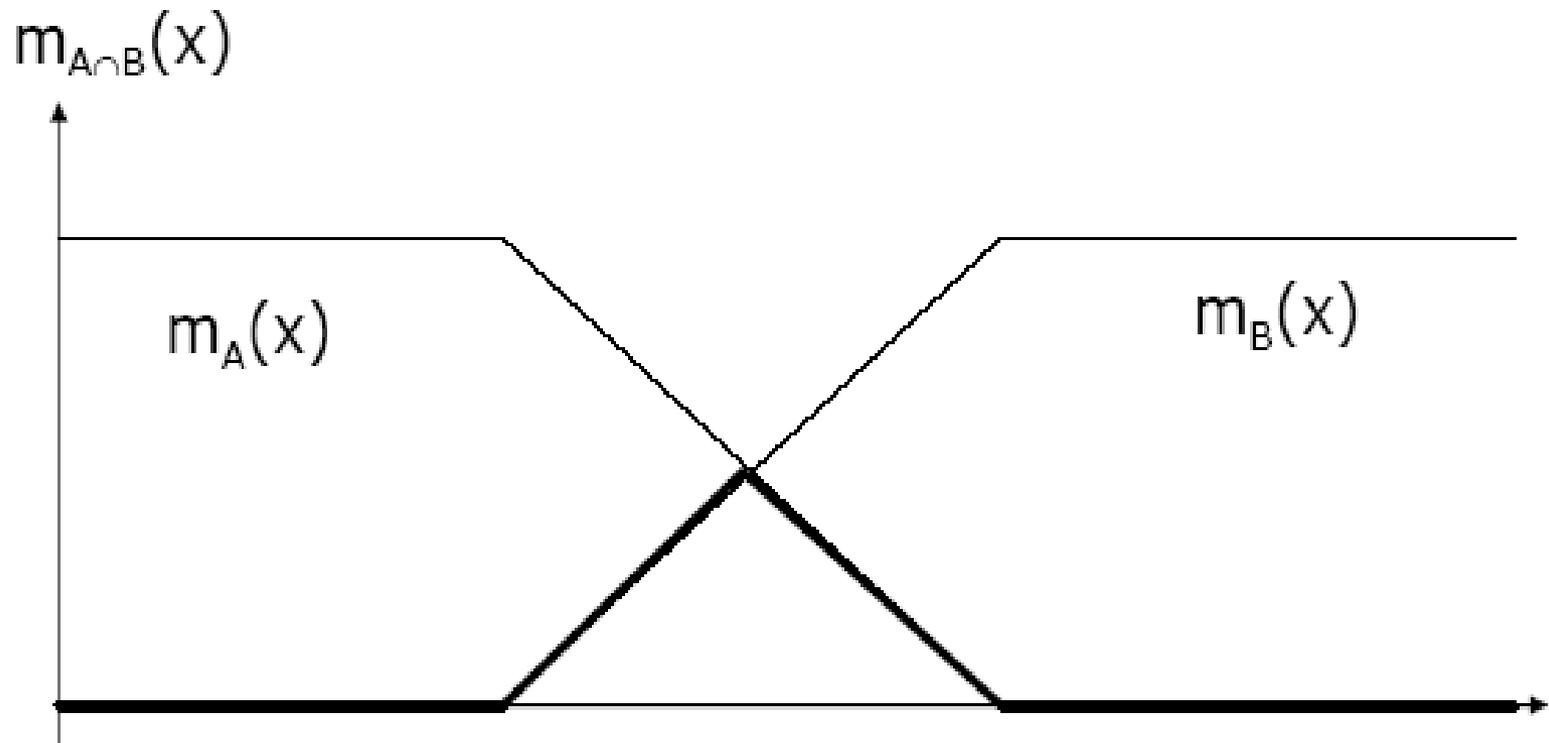
- The *complement* of a fuzzy variable with DOM x is $(1-x)$.
- Complement ($_c$): The *complement* of a fuzzy set is composed of all elements' *complement*.

$$A^c = \{1 - 1.0, 1 - 0.2, 1 - 0.75\} = \{0.0, 0.8, 0.25\}$$

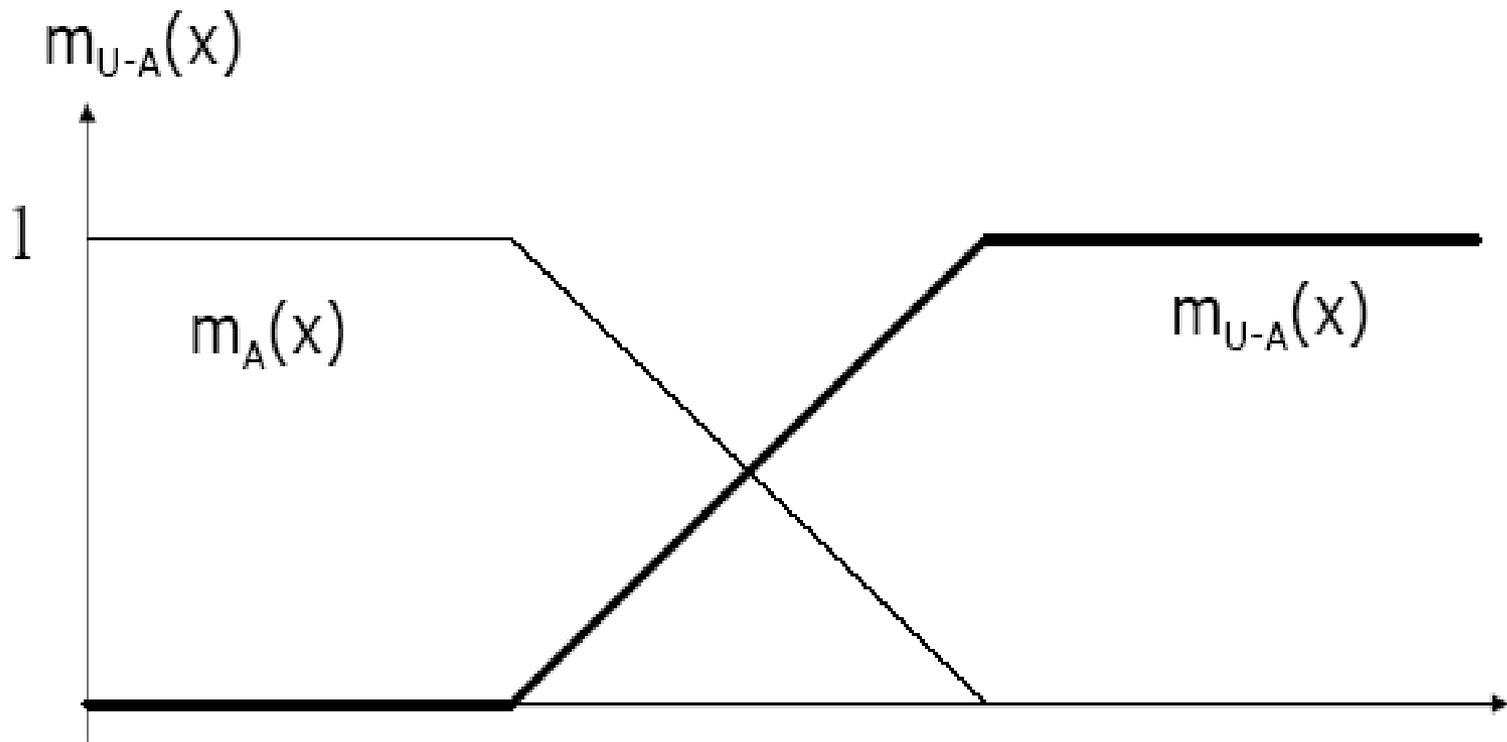
Minh họa...



Minh họa...

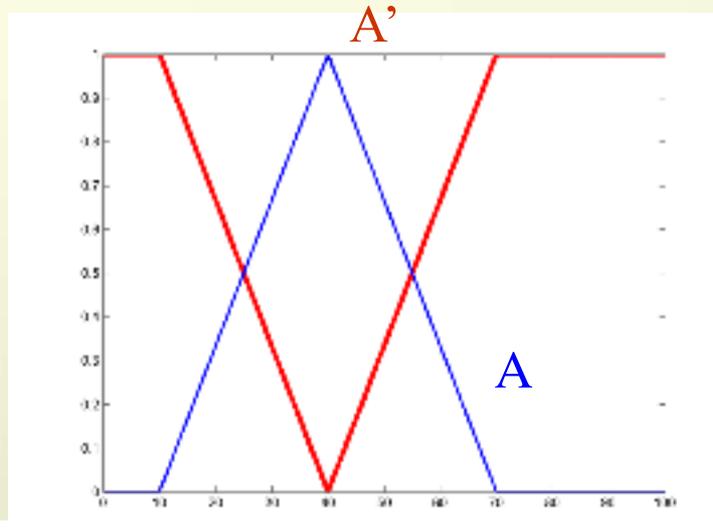
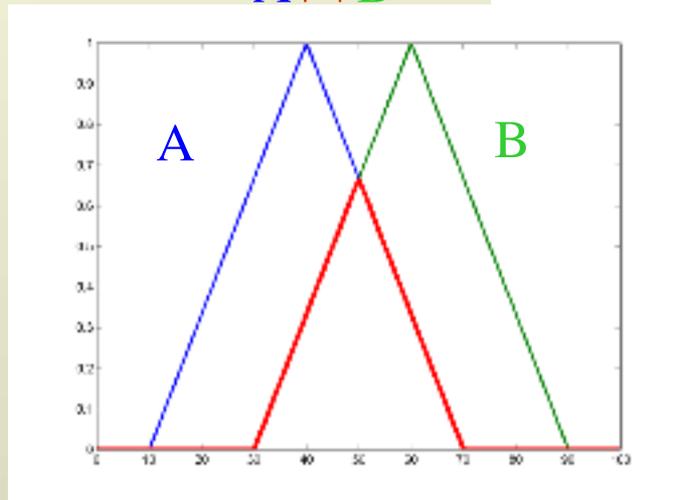


Minh họa...

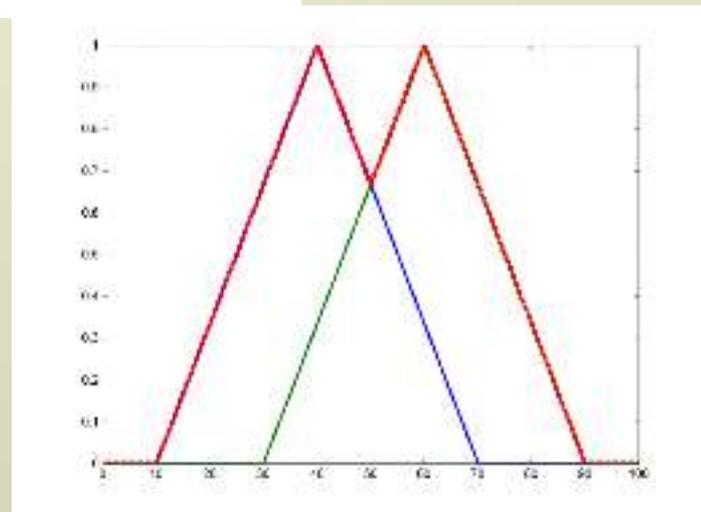


Example fuzzy set operations

$A \cap B$



$A \cup B$



Quan hệ Mờ (Fuzzy Relation...)

Một quan hệ Mờ R giữa hai tập X, Y là một tập mờ trên nền tích Descartes $X \times Y$.

$$\mu_R: X \times Y \rightarrow [0; 1]$$

Diễn tả độ liên hệ giữa các phần tử của X và Y .

Fuzzy Relations

Example:

$X = \{ \text{rainy, cloudy, sunny} \}$

$Y = \{ \text{swimming, bicycling, camping, reading} \}$

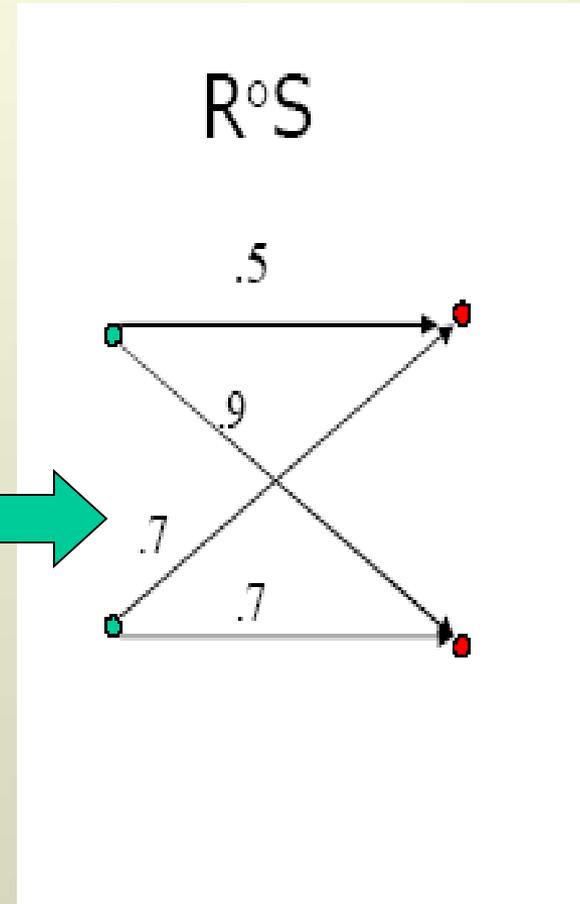
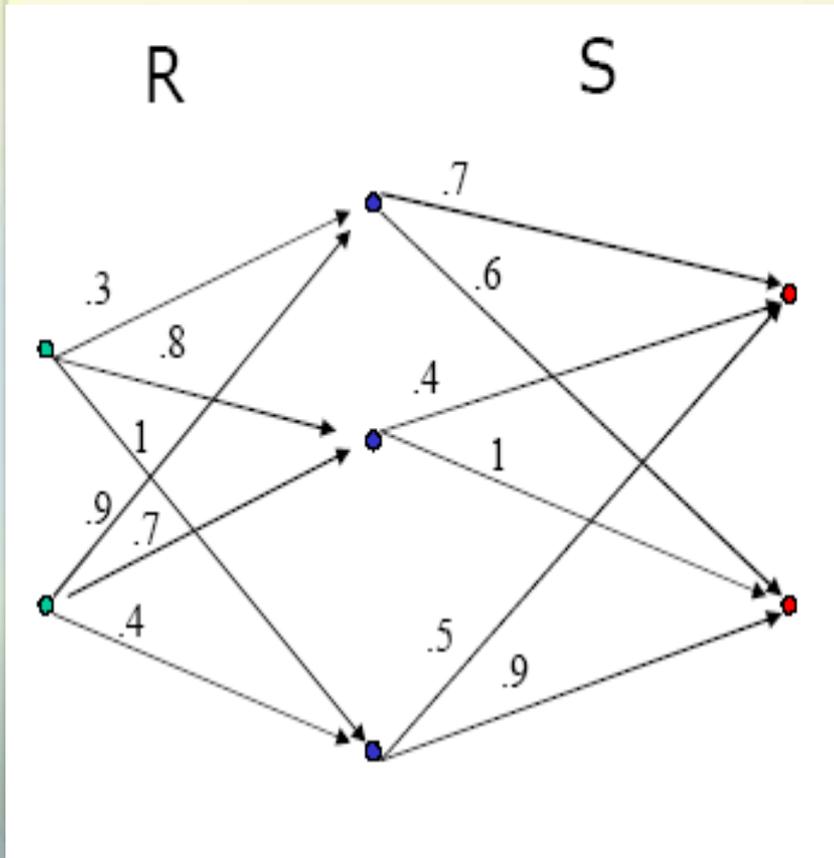
X/Y	swimming	bicycling	camping	reading
rainy	0.0	0.2	0.0	1.0
cloudy	0.0	0.8	0.3	0.3
sunny	1.0	0.2	0.7	0.0

Tích của hai quan hệ Mờ...

Hai quan hệ mờ R,S trên $X \times Y$ và $Y \times Z$ có thể “tổng hợp” trong quan hệ R.S trên $X \times Z$:

$$\mu_{R.S}(x,z) = \max_{y \in Y} \{ \min(\mu_{R(x,y)}, \mu_{S(y,z)}) \}$$

Ví dụ...



Chuẩn hóa – Độ cao...

- Tập Fuzzy A được gọi là chuẩn nếu hàm thành viên của nó đạt được 1.

$$\sup_{u \in U} \mu_A(u) = 1 \quad (*)$$

- Supremum (*) được gọi là độ cao của tập Fuzzy A .

$$hgt(A) = \sup_{u \in U} \mu_A(u)$$

Support...

- Support của tập Fuzzy A kí hiệu $\text{supp}(A)$ bao gồm các phần tử có bậc tư cách thành viên dương.

$$\text{Supp}(A) = \{u \in U : \mu_A(u) > 0\}$$

α -cut

- Một cách tương tự ta định nghĩa *α -cut*

$$A_{\alpha} = \{ u \in U : \mu_A(u) \geq \alpha \}$$

Core...

- Core (nhân) của tập Fuzzy A gồm các phần tử có bậc tư cách thành viên là 1.

$$Core(A) = \{u \in U : \mu_A(u) = 1\}$$

Lực lượng...

- Bản số (lực lượng) của tập Fuzzy A kí hiệu là $Card(A)$ là tổng tất cả các bậc tư cách thành viên của các phần tử của nó.

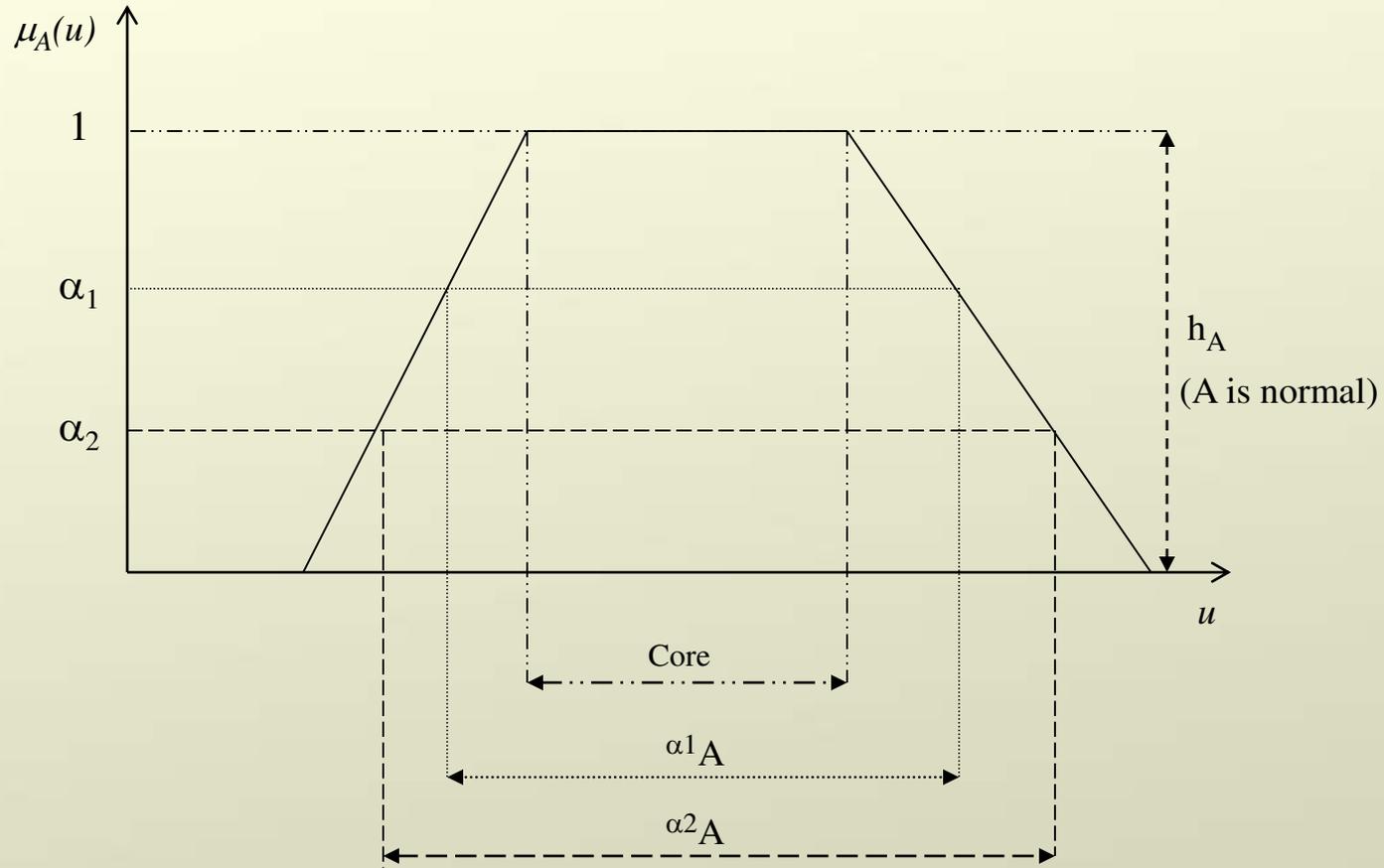
$$Card(A) = \sum_{u \in U} \mu_A(u)$$

Ví dụ: $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

Tập mờ $A = \{(1/0.5), (2/0.3), (3/0), (4/0.6), (5/1), (6/0.3), (7/0), (8/0.1)\}$

$$\begin{aligned} Card(A) &= 0.5 + 0.3 + 0 + 0.6 + 1 + 0.3 + 0 + 0.1 \\ &= 2.8 \end{aligned}$$

Fuzzy Sets (cont.)



Số mờ

Định nghĩa: Tập mờ M trên đường thẳng số thực \mathbb{R}^1 là tập số mờ nếu:

- a) M là chuẩn hoá, tức là có điểm x' sao cho $\mu_M(x')=1$.
- b) ứng với mỗi $\alpha \in \mathbb{R}^1$, tập mức $\{x: \mu_M(x) \geq \alpha\}$ là đoạn đóng trên \mathbb{R}^1

Người ta thường dùng các số mờ dạng tam giác, hình thang và dạng Gauss

SOÁ MÔØ (tt)

- COÄNG SOÁ MÔØ:

$$[a, b] + [d, e] = [a + d, b + e]$$

- TRÖØ SOÁ MÔØ:

$$[a, b] - [d, e] = [a - e, b - d]$$

- NHAÂN SOÁ MÔØ:

$$[a, b] * [d, e] = [\min (ad, ae, bd, be)], \max (ad, ae, bd, be)]$$

- CHIA SOÁ MÔØ:

$$[a, b] / [d, e] = [\min (a/d, a/e, b/d, b/e)], \max (a/d, a/e, b/d, b/e)]$$

SOÁ HOIC MÔØ

- Soá hoic môø döia trên hai tính chaát của con soá môø:
 - Mỗi tập môø cũng nhờ mỗi soá môø có thể ñược nêu ra bởi α -cuts này như vậy duy nhất.
 - α -cuts của soá môø là khoảng ñùng thõic $\forall \alpha \in (0, 1]$

- Gọi * là một trong 4 {+, -, ., /}

$$[a,b]*[d,e]=\{f \times g / a \leq f \leq b, d \leq g \leq e\}$$

- Những hoạt ñộng soá hoic môø döia trên khoảng ñùng.

Gọi $A=[a_1, a_2]$, $B=[b_1, b_2]$, $C=[c_1, c_2]$, $O=[o_1, o_2]$, $1=[1,1]$ ta có:

SOÁ HOIC MÔØ

1. $A+B = B+A,$ $A.B=B.A$
2. $(A+B)+C = A+(B+C),$ $(A.B).C=A.(B.C)$
3. $A = 0+A = A+0,$ $A=1.A=A.1$
4. $A.(B+C) \subseteq A.B+A.C$
5. Neáu $b.c \geq 0 \forall b \in B, \forall c \in C$ thì $A.(B+C)=A.B+A.C$
6. $0 \in A-A$ vaø $1 \in A/A$
7. Neáu $A \subseteq E$ vaø $B \subseteq F$ thì:
 - $A+B \subseteq E+F$
 - $A-B \subseteq E-F$
 - $A.B \subseteq E.F$
 - $A/B \subseteq E/F$

FUZZY LOGIC...

- Đặt nền móng cho sự suy diễn trên những “phát biểu” không chắc chắn.
- Dùng các công cụ, định nghĩa, tính chất của Fuzzy Set (khởi nguồn từ Zadeh).

Example: Hepatitis

“Total proteins are **usually normal**, albumin is **decreased**, alpha globulin are **slightly decreased**, beta-globulins are **slightly decreased**, and gamma-globulins are **increased**”

The linguistic terms printed in red color are inherently vague.

A linguistic variable **AGE**

T(AGE) = {YOUNG, NOT YOUNG, VERY YOUNG, NOT VERY YOUNG, ..., OLD, NOT OLD, VERY OLD, NOT VERY OLD, ..., NOT YOUNG AND NOT OLD, NOT MIDDLE AGED,..., NOT OLD AND NOT MIDDLE AGED,..., EXTREMELY OLD,...}

primary terms: YOUNG, OLD,

the hedges : VERY, MORE OR LESS, QUITE,

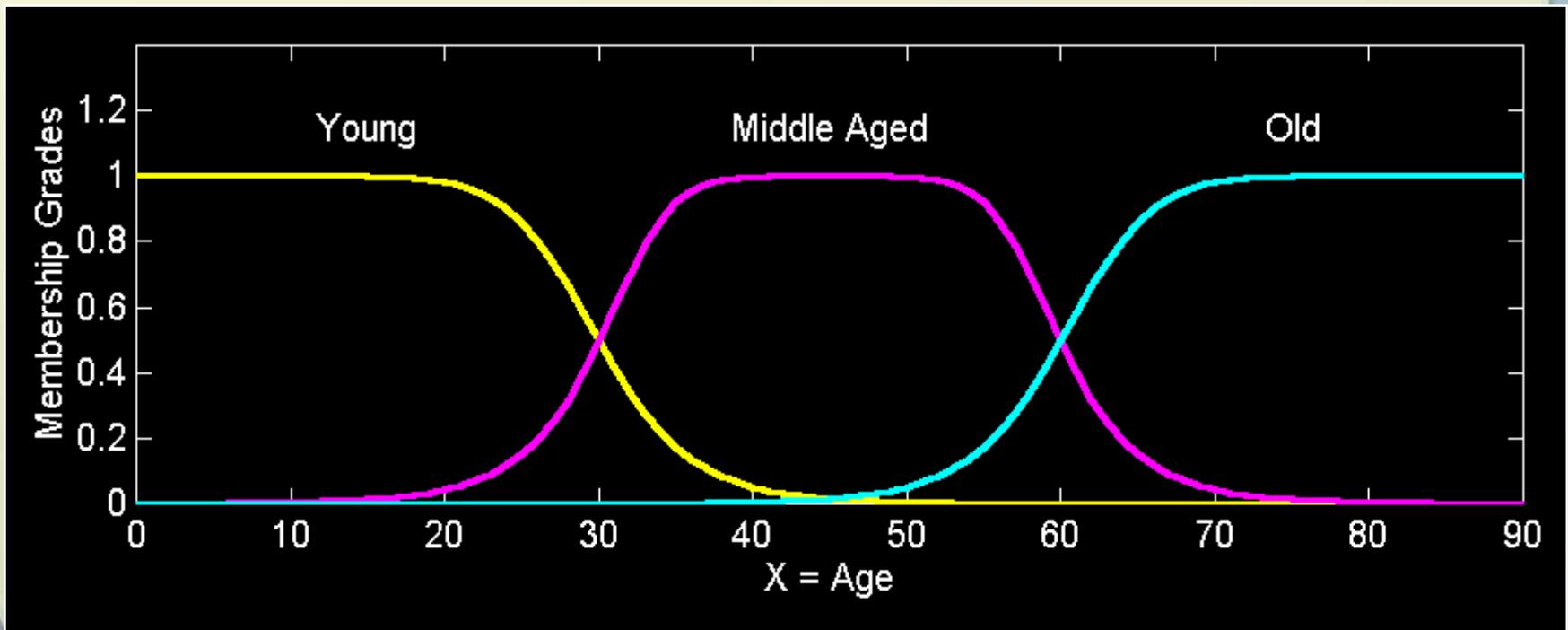
EXTREMELY...,

connectives : AND, OR, EITHER, NEITHER,

negation : NOT

Fuzzy variable and fuzzy values

- Fuzzy partitions formed by the linguistic values “Young”, “Middle Aged”, and “Old”:

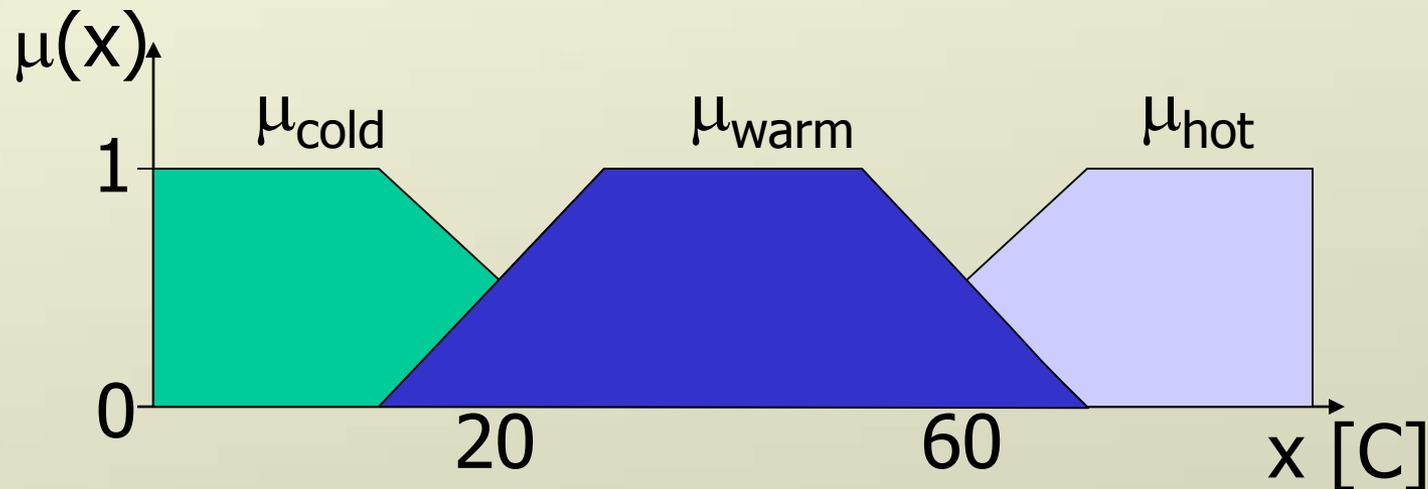


Fuzzy Sets & Linguistic Variables

A linguistic variable combines several fuzzy sets.

linguistic variable : temperature

linguistics terms (fuzzy sets) : { cold, warm, hot }



Linguistic Variables

➤ Biến ngôn ngữ thể hiện giá trị của nó để mô tả cả chất lượng lẫn số lượng

Chất lượng thể hiện bởi **thuật ngữ ngôn ngữ** nghĩa là một ký tự thể hiện bởi **tên của một tập mờ**

Số lượng thể hiện bởi **hàm liên thuộc tương ứng**-thể hiện ý **nghĩa** của tập mờ

Ví dụ: if *TradingQuantity* is *Heavy*

Tập mờ *Heavy* mô tả số lượng của việc kinh doanh stock market trong 1 ngày.

Biến *TradingQuantity* thể hiện biến ngôn ngữ.

FUZZY LOGIC...

Biến ngôn ngữ là 1 biến xác định trên miền các giá trị ngôn ngữ M . Mọi giá trị ngôn ngữ là 1 tập mờ và việc xử lí thông thường là xử lí trên tập mờ.

**A Linguistic Variable Defines a
Concept of Our Everyday Language!**

Quá trình mờ hóa

Xét biến “tốc độ”

Mọi giá trị biến số $x(\text{km/h})$ được đặt tương ứng đối với hàm μ của những mọi giá trị ngôn ngữ

$\mu_{\text{rất chậm}}(X)$, $\mu_{\text{chậm}}(X)$, $\mu_{\text{trung bình}}(X)$,
 $\mu_{\text{nhanh}}(X)$, $\mu_{\text{rất nhanh}}(X)$

Quá trình mờ hóa

$x = 40 \text{ km/h}$

$$\mu_{\text{rất chậm}}(x) = 0$$

$$\mu_{\text{chậm}}(x) = 0.67$$

$$\mu_{\text{trung bình}}(x) = 0.33$$

$$\mu_{\text{nhanh}}(x) = 0$$

$$\mu_{\text{rất nhanh}}(x) = 0$$

Hàm chân trị trong Logic Mờ

Cho biến ngôn ngữ u . Nếu biến u nhận giá trị mờ là A thì biểu thức $u = A$ được gọi là 1 mệnh đề trong logic mờ.

Kí hiệu các mệnh đề là: P, Q, R, \dots

Mọi mệnh đề ứng với chân trị $v(P) \in [0,1]$

Hàm chân trị trong Logic Mờ

Hội và tuyển theo Zadeh:

$$v(P \wedge Q) = \min \{v(P), v(Q)\}$$

$$v(P \vee Q) = \max \{v(P), v(Q)\}$$

Hội và tuyển theo Lukasiewicz:

$$v(P \wedge Q) = \max \{0, v(P) + v(Q) - 1\}$$

$$v(P \vee Q) = \min \{1, v(P) + v(Q)\}$$

Hàm chân trị trong Logic Mờ

Hội và tuyển theo tích và tổng:

$$v(P \wedge Q) = v(P) \cdot v(Q)$$

$$v(P \vee Q) = v(P) + v(Q) - v(P)v(Q)$$

Hội và tuyển theo Einstein:

$$v(P \wedge Q) = \frac{v(P) \cdot v(Q)}{2 - [v(P) + v(Q) - v(P)v(Q)]}$$

$$v(P \vee Q) = \frac{v(P) + v(Q)}{1 + v(P)v(Q)}$$

Hàm chân trị trong Logic Mờ

Phép phủ định:

$$v(\bar{P}) = 1 - [v(P)]^2$$

$$v(\bar{P}) = \frac{1 - v(P)}{1 + \lambda v(P)} \quad \lambda > -1, \text{ tùy ý}$$

Các phép toán của Logic Mờ...

- Phép phủ định.
- Phép hội.
- Phép tuyển.
- Phép kéo theo.

Logic mờ

Để giảm bớt sự phụ thuộc vào các phép tính min max, do đó làm tăng mềm dẻo và linh hoạt trong việc giải các bài toán thực tế người ta mở rộng phép lấy min max thành 2 lớp

t-norm và **t-conorm** có từng cặp phần tử đối ngẫu.

Như vậy chúng ta sẽ không có một đại số tập mờ duy nhất, vì trong định nghĩa đại số tập mờ ta luôn có thể thay min, max bằng t-norm và t-conorm đối ngẫu nhau và thu được một tập đại số mờ khác

Phép phủ định

Định nghĩa:

Hàm $n:[0,1] \rightarrow [0,1]$ không tăng thỏa mãn điều kiện $n(0)=1$, $n(1)=0$, gọi là hàm phủ định.

Một vài ví dụ:

- Hàm phủ định chuẩn $n(x)=1-x$
- Hàm phủ định $n(x)=1-x^2$
- Họ phủ định (Sugeno, 1997) $N_\lambda(x)=(1-x)/(1+\lambda x)$, với $\lambda > -1$

Hàm n là phép phủ định mạnh, nếu n giảm chặt và $n(n(x))=x$ mọi x .

Phép hội (t-norm)

Phép hội (vẫn quen gọi là phép AND) là 1 trong các phép toán logic cơ bản nhất. Nó cũng là cơ sở để định nghĩa phép giao của 2 tập mờ.

Định nghĩa: Hàm $T:[0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ là một **t-norm** nếu thỏa mãn các điều kiện sau:

a) $T(1,x) = x$, với mọi $0 \leq x \leq 1$ (Tồn tại phần tử đơn vị)

b) $T(x,y) = T(y,x)$, với mọi $0 \leq x, y \leq 1$ (T có tính giao hoán)

c) $T(x,y) \leq T(u,v)$, với mọi $0 \leq x \leq u \leq 1, 0 \leq y \leq v \leq 1$

(Không giảm theo từng biến)

d) $T(x,T(y,z))=T(T(x,y),z)$ với mọi $0 \leq x,y,z \leq 1$ (T có tính kết hợp)

Từ những tiêu đề trên chúng ta suy ra ngay $T(0,x)$. Hơn nữa tiêu đề

d) đảm bảo tính thác triển duy nhất cho hàm nhiều biến.

Một vài ví dụ :

- Min (Zadeh 1965) : $T(x,y)=\min(x,y)$
- Dạng tích : $T(x,y)=xy$
- t-norm Lukasiewicz : $T(x,y)=\max\{x+y-1,0\}$
- Min nilpotent (Fodor 1993): $T(x,y)=\min(x,y)$ nếu $x+y > 1$
 $=0$ nếu $x+y \leq 1$
- t-norm yếu nhất (drastic, product):
 $Z(x,y)=\min(x,y)$ nếu $\max(x,y)=1$
 $=0$ nếu $\max(x,y) < 1$

Không khó khăn để chỉ ra rằng với mỗi 1-norm T thì

$$Z(x,y) \leq T(x,y) \leq \min(x,y) \text{ với mọi } 0 \leq x, y \leq 1$$

Phép tuyền (t-conorm)

Giống như phép hội, phép tuyền (hay toán tử OR) thông thường cần thỏa mãn các tiên đề sau:

Định nghĩa: Hàm $S:[0,1]$ gọi là phép tuyền (OR suy rộng) hay là t-conorm nếu thỏa mãn các tiên đề sau:

- a) $S(0,x) = x$, với mọi $0 \leq x \leq 1$ (Tồn tại phần tử đơn vị)
- b) $S(x,y) = S(y,x)$, với mọi $0 \leq x,y \leq 1$ (S có tính giao hoán)
- c) $S(x,y) \leq S(u,v)$, với mọi $0 \leq x \leq u \leq 1, 0 \leq y \leq v \leq 1$
(Không giảm theo từng biến)
- d) $S(x,S(y,z))=S(S(x,y),z)$ với mọi $0 \leq x,y,z \leq 1$ (S có tính kết hợp)

Luật De Morgan

Định nghĩa: cho T là t-norm, S là t-conorm, và n là phép phủ định chặt. Chúng ta nói bộ ba (T,S,n) là một bộ ba De Morgan nếu $n(S(x,y))=T(nx,ny)$

Chúng ta nói bộ ba (T,S,n) là liên tục nếu T và S là hai hàm liên tục. Sau đây là hai lớp bộ ba quan trọng

Định nghĩa: bộ ba De Morgan (T,S,n) là bộ ba mạnh (strong) khi và chỉ khi có một tự đồng cấu $\varphi: [0,1] \rightarrow [0,1]$ sao cho:

a) $T(x,y) = \varphi^{-1} (\max(\varphi(x) + \varphi(y) - 1, 0))$

b) $S(x,y) = \varphi^{-1} (\min(\varphi(x) + \varphi(y), 1))$

c) $N(x) = \varphi^{-1} (1 - \varphi(x))$

Định nghĩa: bộ ba De Morgan (T,S,n) là bộ ba chặt (strict) khi và chỉ khi có một tự đồng cấu $\varphi: [0,1] \rightarrow [0,1]$ sao cho:

a) $T(x,y) = \varphi^{-1} ((\varphi(x)\varphi(y)))$

b) $S(x,y) = \varphi^{-1} ((\varphi(x) + \varphi(y) - \varphi(x)\varphi(y)))$

c) $N(x) = \varphi^{-1} (1 - \varphi(x))$

Phép kéo theo

Đã có khá nhiều nghiên cứu về phép kéo theo. Điều đó cũng tự nhiên vì đây là công đoạn mấu chốt của quá trình suy diễn trong mọi lập luận xấp xỉ, bao gồm cả suy luận mờ.

Định nghĩa: Phép kéo theo (implication) là một hàm số $I: [0,1] \rightarrow [0,1]$ thỏa mãn các điều kiện sau:

- a) Nếu $x \leq z$ thì $I(x,y) \geq I(z,y)$ với mọi $y \in [0,1]$
- b) Nếu $y \leq u$ thì $I(x,y) \leq I(x,u)$ với mọi $y \in [0,1]$
- c) $I(0,x) = 1$ với mọi $x \in [0,1]$
- d) $I(x,1) = 1$ với mọi $x \in [0,1]$
- e) $I(1,0) = 0$

Tuy đơn giản nhưng mục e) vẫn cần vì không thể suy ra mục e) từ 4 tiên đề đầu.

Để tính toán được, chúng ta cần những dạng cụ thể của phép kéo theo. Sau đây là một số dạng hàm kéo theo, xây dựng dựa vào các phép toán logic mờ đã suy rộng trên

Cho T là t-norm, S là t-conorm, và n là hàm phủ định mạnh

Định nghĩa: Dạng kéo theo thứ nhất. Hàm $I_{S1}(x,y)$ xác định trên $[0,1]^2$ bằng biểu thức $I_{S1}(x,y) = S(n(x),y)$

Rõ ràng ẩn ý sau định nghĩa này là công thức logic cổ điển $P \Rightarrow Q = \neg P \vee Q$.

Định lý: Với bất kỳ t-norm T , t-conorm S và phép phủ định mạnh n nào, I_{S1} là phép kéo theo thỏa định nghĩa phép kéo theo.

Phép kéo theo thứ hai sau đây lấy từ lôgic trực cảm (intuitionistic logic)

Định nghĩa: Cho T là t-norm, hàm $I_T(x,y)$ xác định trên $[0,1]^2$ bằng biểu thức

$$I_T(x,y) = \sup\{u: T(x,u) \leq y\}$$

Định lý: Với bất kỳ t-norm T nào, I_T được định nghĩa như trên là phép kéo theo thỏa định nghĩa phép kéo theo.

Phép phủ định...

- Phép phủ định là một phép tính cơ bản của Logic.
- Hàm $n:[0,1] \rightarrow [0,1]$ không tăng thỏa mãn các điều kiện $n(0)=1$ và $n(1)=0$ được gọi là hàm phủ định.
- Hàm n được gọi là phủ định mạnh nếu n giảm chặt và $n(n(x))=x$.

Phép hội...

- Phép hội (and) là phép toán cơ bản của logic và thỏa mãn các tiên đề sau:
- Hàm $T:[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ gọi là 1 t-chuẩn nếu thỏa:

$$a) T(1, x) = x$$

$$b) T(x, y) = T(y, x)$$

$$c) T \text{ không giảm} : T(x, y) \leq T(u, v) \text{ nếu } (x, y) \leq (u, v)$$

$$d) T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z)$$

Phép tuyền...

- Phép tuyền là một phép toán logic cơ bản. Nó phải thỏa mãn các tiên đề sau:
- Hàm $S:[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ gọi là 1 t-đối chuẩn nếu thỏa:

$$a) S(0, x) = x$$

$$b) S(x, y) = S(y, x)$$

$$c) S \text{ không giảm} : S(x, y) \leq S(u, v) \text{ nếu } (x, y) \leq (u, v)$$

$$d) S(x, S(y, z)) = S(S(x, y), z)$$

Mối liên hệ...

- Nếu T là một t-chuẩn và n là một phủ định mạnh thì S xác định như dưới đây là một t-đối chuẩn:

$$S(x,y)=n[T[n(x),n(y)]]$$

Phép kéo theo...

- Phép kéo theo là một hàm số $I: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ thỏa các điều kiện:

$$a) x \leq z \implies I(x, y) \geq I(z, y)$$

$$b) y \leq u \implies I(x, y) \leq I(x, u)$$

$$c) I(0, x) = 1$$

$$d) I(x, 1) = 1$$

$$e) I(1, 0) = 0$$

Luật mờ là gì...?

Một luật mờ có thể được định nghĩa dựa trên phát biểu điều kiện như trong dạng sau:

IF *x is A*
THEN *y is B*

Với x, y là những biến ngôn ngữ;

A và B là những giá trị ngôn ngữ xác định bởi những tập mờ trên X, Y

Sự khác biệt giữa hệ luật cổ điển và hệ luật mờ...

Luật cổ điển IF-THEN sử dụng logic nhị phân
ví dụ

Rule: 1

IF speed is > 100
THEN stopping_distance is long

Rule: 2

IF speed is < 40
THEN stopping_distance is short

Biến speed có thể lấy giá trị trong khoảng từ 0 đến 220 km/n nhưng biến ngôn ngữ *stopping_distance* chỉ có thể lấy giá trị là *long* hoặc *short*. Nói một cách khác, hệ luật cổ điển được thể hiện bởi 1 hay 0 trong logic Boolean

Hệ Luật Mờ

Bây giờ ta biểu diễn **stopping distance rules trong hệ luật mờ**:

Rule: 1

IF speed is fast

THEN stopping_distance is long

Rule: 2

IF speed is slow

THEN stopping_distance is short

Trong hệ luật mờ, biến ngôn ngữ *speed* cũng có giá trị trong khoảng 0 đến 220 km/h, nhưng khoảng này có chứ tập mờ như : *slow*, *medium* và *fast*. Miền giá trị của biến ngôn ngữ *stopping_distance* nằm trong khoảng 0 đến 300 m và có thể chứa tập mờ : *short*, *medium* và *long*.

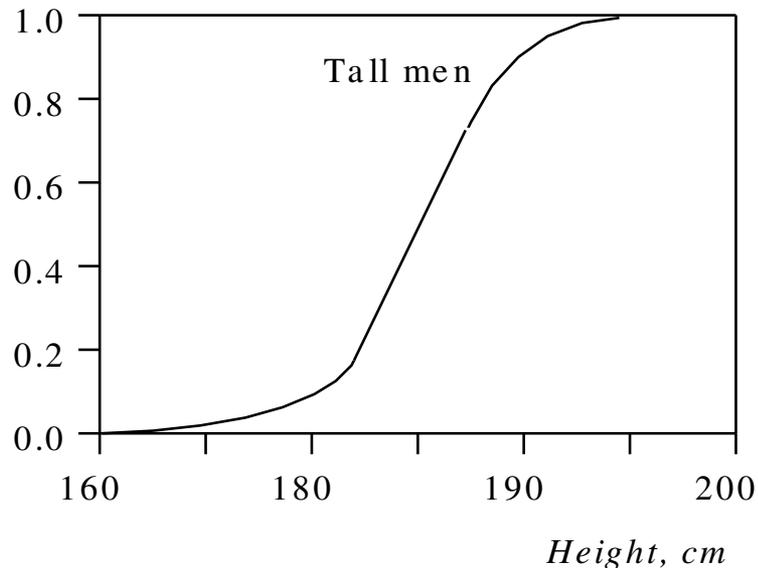
Hệ Luật Mờ

Chú ý:

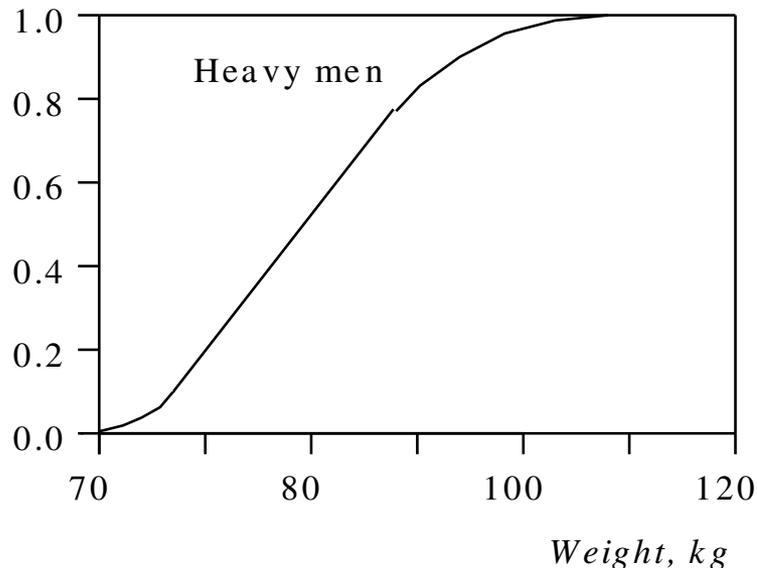
1. Hệ luật mờ có liên quan đến tập mờ
2. Nếu về trái đúng với vài degree of membership thì về phải cũng phải đúng với cùng degree

Fuzzy sets of *tall* and *heavy* men

Degree of Membership



Degree of Membership

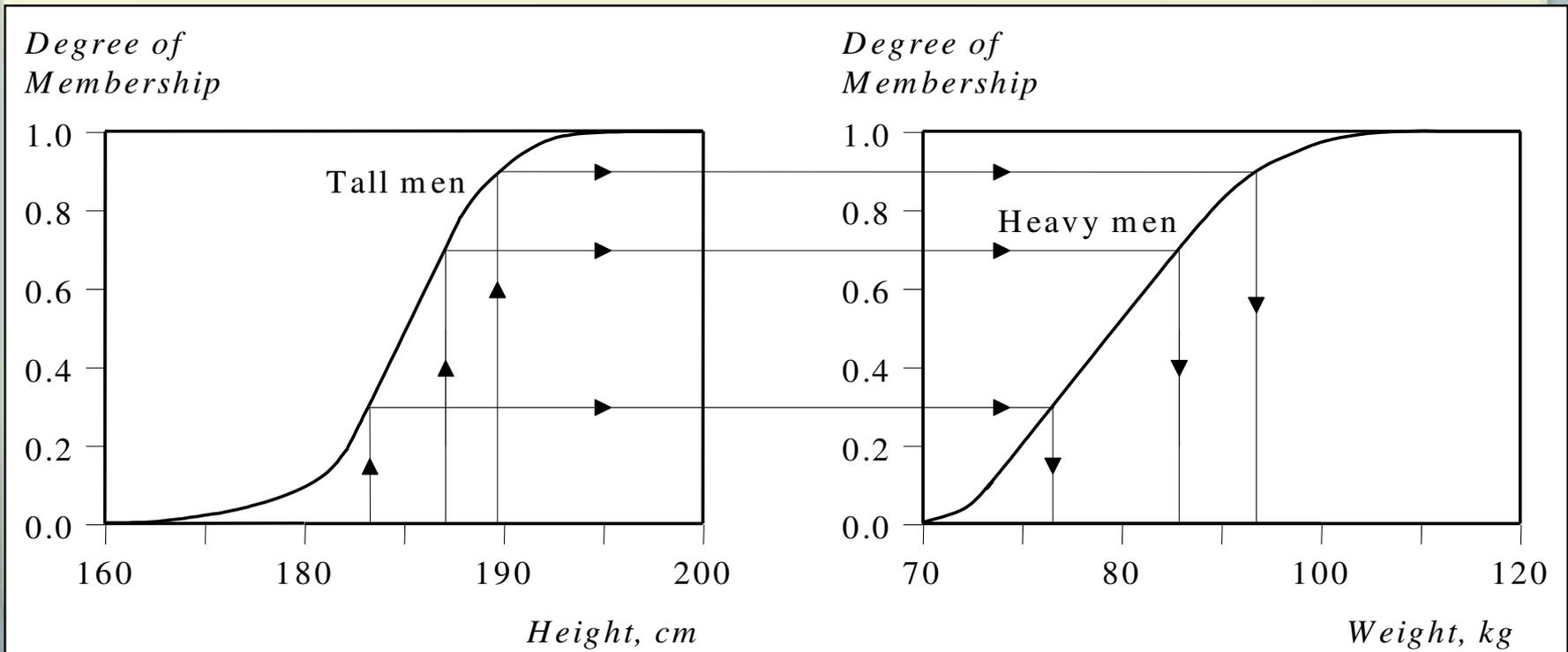


Những tập mờ này cung cấp cơ sở cho mô hình đánh giá trọng lượng. Mô hình này dựa trên mối quan hệ giữa chiều cao và trọng lượng.

IF height is *tall*
THEN weight is *heavy*

Hệ Luật Mờ

Giá trị đầu ra được đánh giá trực tiếp từ giá trị membership grade tương ứng trong vế trái. Cách suy diễn này dùng 1 phương pháp gọi là **monotonic selection**.



Hệ Luật Mờ

Một luật mờ có thể có nhiều thành phần trong vế trái:

IF project_duration is long
AND project_staffing is large
AND project_funding is inadequate
THEN risk is high

IF service is excellent
OR food is delicious
THEN tip is generous

Hệ Luật Mờ

Về phần của luật mờ cũng có thể có nhiều phần ví dụ:

```
IF      temperature is hot
THEN   hot_water is reduced;
        cold_water is increased
```

Hệ Luật Mờ

- Hệ luật mờ khá hữu ích cho việc mô hình hóa suy nghĩ, nhận thức, ý kiến của con người
- Một luật mờ: if-then có dạng:
 - “If x is A then y is B ”
 - với A and B là những giá trị ngôn ngữ được định nghĩa từ hệ tập mờ trong X and Y .
 - “ x is A ” được gọi là *antecedent*
 - “ y is B ” được gọi là *consequent*.

Hệ Luật Mờ

- If pressure is high, then volume is small.
- If the road is slippery, then driving is dangerous.
- If the fruit is ripe, then it is soft.

Hệ Luật Mờ

- Luật mờ “*If x is A then y is B*” có thể được rút gọn như sau: $A \rightarrow B$ và được kí hiệu $A \times B$.

Hệ Luật Mờ

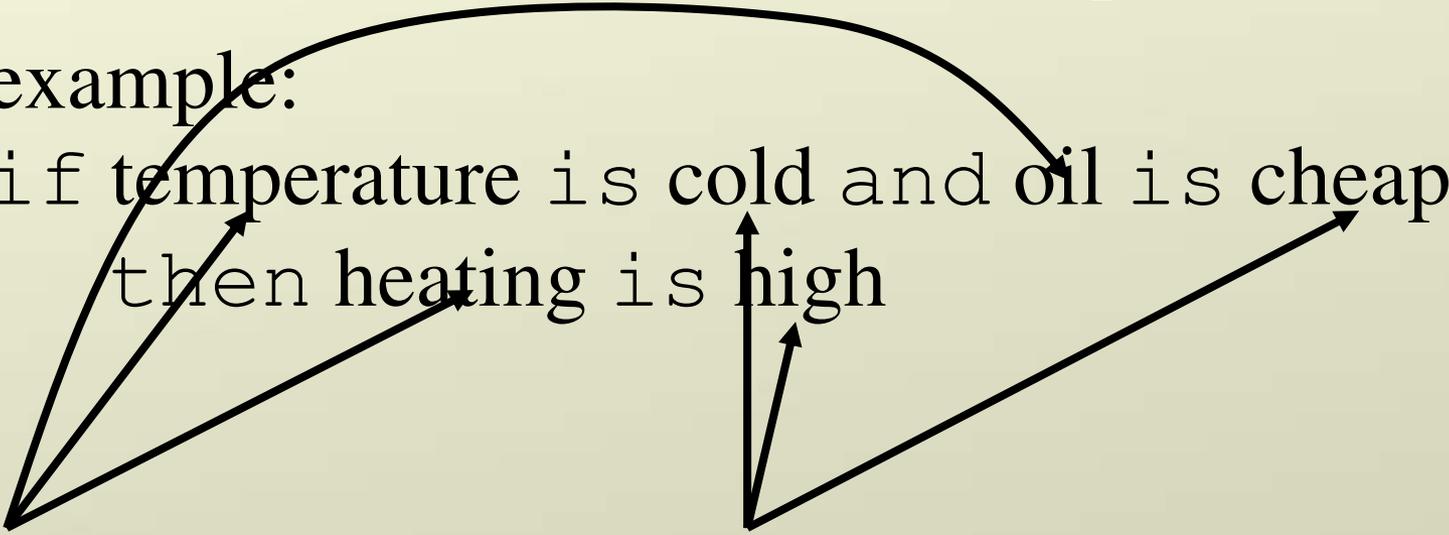
if-then-rules

- general form:

if <antecedent> then <consequence>

- example:

if temperature is cold and oil is cheap
then heating is high



linguistic variables

linguistic values/terms (fuzzy sets)

Hệ Luật Mờ

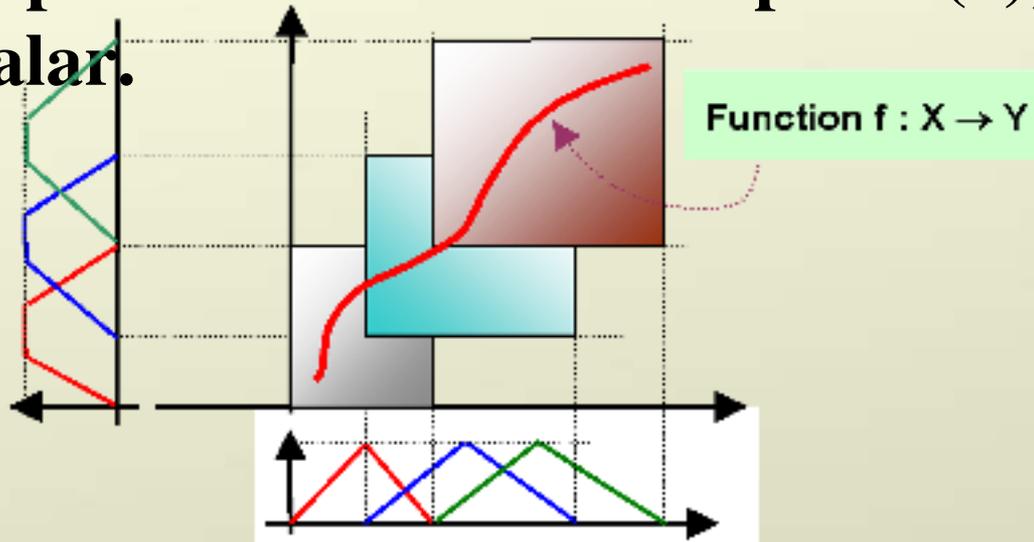
Heating Oil price:	Temperature :		
	cold	warm	hot
cheap	high	high	medium
normal	high	medium	low
expensive	medium	low	low

if temperature is cold and oil price is low then heating is high

if temperature is hot and oil price is normal then heating is low

Fuzzy approximation

- Fuzzy systems $F: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^p$ use m rules to map vector x on the output $F(x)$, vector or scalar.



Singleton model:

R_i : IF x is A_i Then y is b_i

Rules base

Heating Price	freezing	Temperature cold	chilly
cheap	full	full	medium
so-so	full	medium	weak
expensive	medium	weak	no

IF Temperature=freezing and Heating-price=cheap THEN heating=full

IF Temperatura=chilly and Heating-price=expensive THEN heating=no

Hệ Luật Mờ

- HEÄ LUAÄT MÔØ

IF ... THEN

- Theo luật rõ: **If $t > 30$, $a > 15$ then $v = 300$**
- Nguyên lý xử lý các bài toán mờ: Input rõ thì sẽ mờ
hoà ñể áp dụng luật

roõ  môø

- Dữ liệu vào rõ \rightarrow mờ hoá ñể tìm luật áp dụng \rightarrow tổng
hợp rõ hoá ñể áp dụng. Rõ \rightarrow mờ \rightarrow rõ

Hệ Luật Mò

- Nhật lao quốc qua ãàu tieân òùng ðĩng heã luaät mô ñeã ñieàu khiẽn taøu ñieãn ngaàm ôu Tokyo → ra ñôi theá heã maùy mòm thông minh – intelligent machine → system

HT + IT

(high tech + information technology)

- Ví dụ: òùng ðĩng trong hoãit ñoãng cuõa caùc maùy giaët
 - Neáu quaàn àu baãn + nhiều thì xø phøng nhiều + maùy quay lâu
 - Neáu quaàn àu saich+ nhiều thì xø phøng ít+ maùy quay lâu
 - Neáu quaàn àu baãn + ít thì xø phøng nhiều + maùy quay vöøa
 -

→ còu 36 luaät

Hệ Luật Mờ

Syntax:

if X is A then Y is B

if X is A then Y is B

unless Z is C

Taxonomy

categorical

if X is then Y

is B

qualified

if X is A then

Semantics

usually (Y is B)

• *single rule*

• *collection of rules*

TAXONOMY OF RULES

categorical (examples)

X is A (fact)

if X is A then Y is B or equivalently Y is B if X is A

if X is A and Y is B then U is C and W is D

if X is A then Y is $f(A)$

if X is A then Action is B (command)

if X is A and Context is B then replace X is A with X is C
(replacement)

if X is A then delete (if X is B then Y is C) (metarule)

if X is A then add (if X is B then Y is C) (metarule)

the more X is A the more Y is B (gradual)

...

TAXONOMY OF RULES IN FDCL

- *qualified (examples)*

if X is A then Y is B unless Z is E (exception)

if X is A then usually (Y is B) (usuality qualified)

usually (if X is A then Y is B)

if X is A and Prob {Y is B|X is A} is C then Action is D

if X is A then possibly (Y is B) (possibility qualified)

(if X is A then Y is B) is possible α (possibilistic)

(if X is A then Y is B) is true α (truth qualified)

...

- *hybrid (examples)*

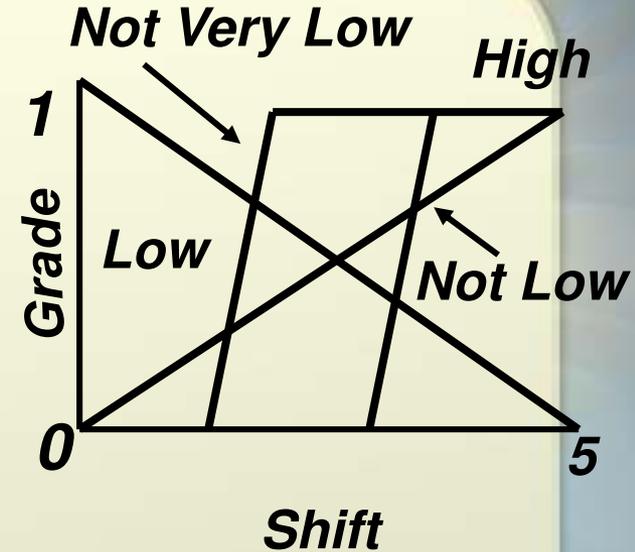
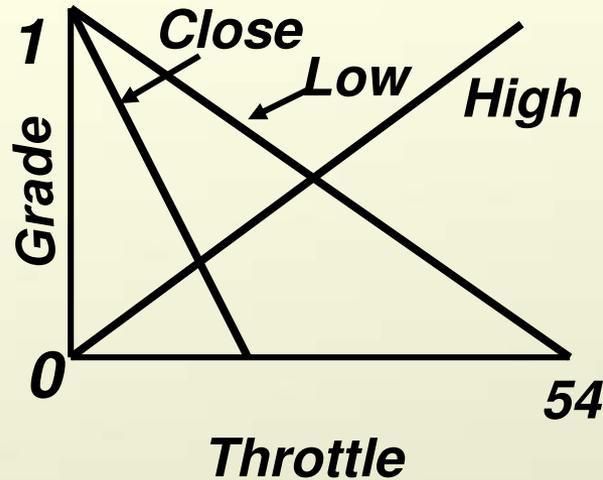
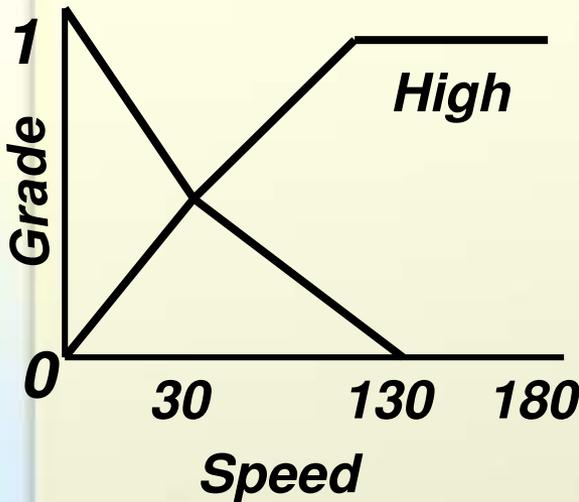
usually (the more X is A the more Y is B)

If X is A then very likely (Y is B) unless Z is E

...

HONDA FUZZY LOGIC TRANSMISSION

Fuzzy Set



Control Rules:

1. *If (speed is low) and (shift is high) then (-3)*
2. *If (speed is high) and (shift is low) then (+3)*
3. *If (throt is low) and (speed is high) then (+3)*
4. *If (throt is low) and (speed is low) then (+1)*
5. *If (throt is high) and (speed is high) then (-1)*
6. *If (throt is high) and (speed is low) then (-3)*

Suy luận bằng Fuzzy Logic...

Xét phát biểu:

- Nếu “góc tay ga quay” lớn thì “xe chạy nhanh”.
- cần phải biểu diễn những luật “mờ” này trong Fuzzy Logic

Biểu diễn luật...

Góc quay tay ga lớn

x: biến ngôn ngữ biểu diễn góc quay tay ga.

Không gian nền góc quay $U=[0,360^0]$

Tập A góc quay lớn là 1 tập Fuzzy trên U.

P =Góc quay tay ga lớn: **x is A**

Biểu diễn luật...

Xe đi nhanh

y : biến ngôn ngữ tốc độ xe.

Không gian nền tốc độ: $V=[0,150 \text{ km/h}]$

Tập B “tốc độ nhanh” là một tập mờ trên V .

Q =Xe đi nhanh : y is B

Biểu diễn...

- Luật mờ có dạng $P \Rightarrow Q$
- Biểu diễn bằng một quan hệ mờ trên không gian nền $U \times V$ với công thức xác định bởi phép kéo theo...

$$R_{(A, \tilde{B})}(u, v) = R_{P \Rightarrow Q}(u, v) = I(A(u), B(v))$$

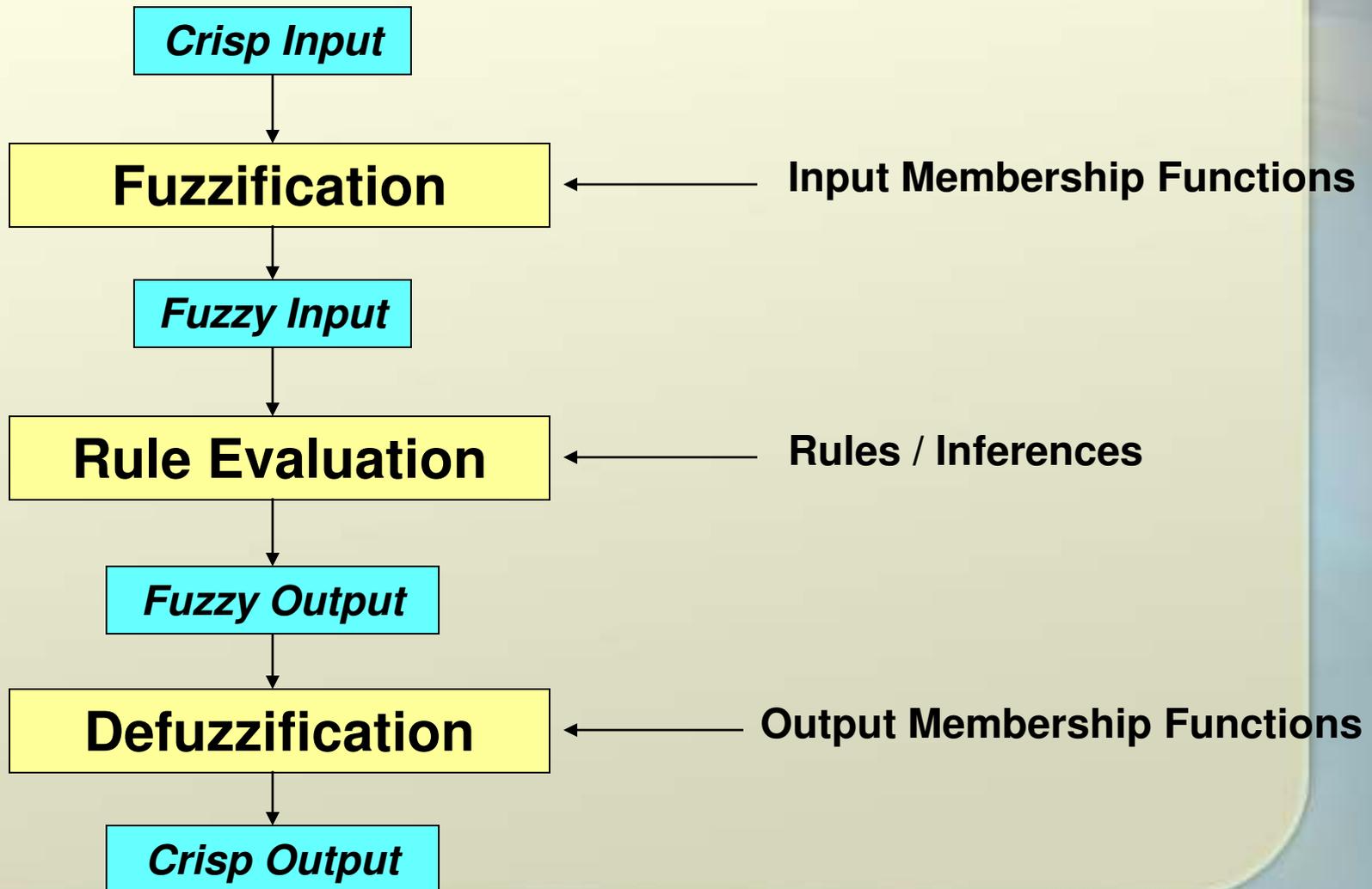
tt...

- Bây giờ suy diễn mờ đã có thể xác định

Luật mờ	$P \rightarrow Q$ là 1 quan hệ mờ
Sự kiện đầu vào	$P' = \{x \text{ is } A'\}$, A' là tập mờ
Kết luận	$Q' = \{y \text{ is } B'\}$

$$B' = A' \circ R_{(A,B)}$$

Operation of Fuzzy System



Ứng dụng

